ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

HERHANGİ BİR POZİTİF N TAMSAYISININ M PARÇAYA AYRIŞIMLARININ SAYISI İÇİN BAZI FORMÜLLER

Yusuf SOYVURAL

MATEMATIK ANABİLİM DALI

ANKARA
2026

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

HERHANGİ BİR POZİTİF N TAMSAYISININ M PARÇAYA AYRIŞIMLARININ SAYISI İÇİN BAZI FORMÜLLER

Yusuf SOYVURAL

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ali Bülent EKİN

Pozitif n tamsayısının bir ayrışımı, artmayan sırada doğal sayıların toplamı şeklinde yazılımıdır. Yani, $\pi_1 \geq \pi_2 \geq \cdots \geq \pi_m > 0$ olmak üzere; $n = \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_m$ toplamına n nin m parçalı bir ayrışımı denir ve $P(n, m)$ ile gösterilir.

Dört bölümden oluşan bu tezin birinci bölümünde pozitif bir n tamsayısının ayrışımlarına ilişkin temel kavramlar, ayrışım teorisi ile çarpımsallık arasındaki ilişki, üreteç fonksiyonu, Euler beşgensel sayı teoremi, asimptotik formül ve Ramanujan kongrüanslarına yer verilmiştir. Bu tezde, n pozitif tamsayısının tam olarak m parçadan oluşan ayrışımlarının sayısı incelenmiştir. Bu kapsamda, $P(n, m)$ polinomlarını quasi polinomlar cinsinden ifade eden Munagi'nin q-kısmi kesir ayrışımı yöntemi, $P(n, m)$ nin fraktal yapısını veren Srdanov'un dikey ve yatay toplama yöntemleri ve Mattson'un hibrit yöntemi örneklerle açıklanmıştır. Tezde kullanılan gösterimler ve hesaplama yöntemleri de tanıtılmıştır.

Literatürde $P(n, m)$ nin elde edilmesinde $P(n, m-1)$ polinomlarının bilinmesinin kritik bir rol oynadığı görülmektedir. Bu nedenle ikinci bölümünde $P(n, m)$ nin hesaplanmasında kullanılan yineleme bağıntısı, Bernoulli polinomları ve Faulhaber formülü ispatlarıyla sunulmaktadır. Üçüncü bölümünde, $P(n, m)$ polinomları tam değer fonksiyonu ile ifade edilmiş ve $m \leq 10$ için bu polinomlar açık bir biçimde verilmiştir. Ayrıca $P(n, m-1)$ bilindiğinde $P(n, m)$ nin genel formu elde edilmiş ve bu form kullanılarak $P(n, 11)$ türetilirken; $P(n, 12)$ için sonuçlar doğrudan sunulmuştur. Son bölüm, bu çalışmanın bulgularını ve katkılarını özetlemektedir.

Ocak 2026, 54 sayfa

Anahtar Kelimeler: Ayrışım teorisi, m parçalı ayrışımlar, Faulhaber formülü.

ABSTRACT

PhD Thesis

SOME FORMULAS FOR THE NUMBER OF PARTITIONS OF A POSITIVE INTEGER N INTO M PARTS

Yusuf SOYVURAL

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Ali Bülent EKİN

A partition of a positive integer n is written as a sum of natural number in non-increasing order. That is, the sum $n = \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_m$, for which $\pi_1 \geq \pi_2 \geq \cdots \geq \pi_m > 0$, is called a partition of n into m parts and is denoted by $P(n, m)$.

In the first section of this four-chapter thesis, the fundamental concepts related to the partitions of a positive integer n, the relationship between partition and multiplicativity, the generating function, Euler's penthagonal number theorem, the asymptotic formula, and Ramanujan congruences are presented. In this thesis, the number of partitions of a positive integer n into exactly m parts has been investigated. In this context, Munagi's q-partial fraction partition method, which expresses the polynomials $P(n, m)$ in terms of quasi-polynomials, Srdanov's vertical and horizontal methods, which give the fractal structure of $P(n, m)$, and Mattson's hybrid method, have been explained with examples. The notations and calculation methods used the thesis are also introduced.

In the literature, it is observed that knowledge of the polynomials $P(n, m-1)$ plays a critical role in obtaining $P(n, m)$. Therefore, the second section presents the recurrence relation, Bernoulli polynomials, and Faulhaber's formula used in calculating $P(n, m)$, together with proofs. The polynomials $P(n, m)$ are expressed as floor function and these polynomials are given explicitly for $m \leq 10$ in the third section. Furthermore, the general form of $P(n, m)$ is obtained when $P(n, m-1)$ is known, and using this form, $P(n, 11)$ is derived while the results for $P(n, 12)$ are presented directly. The final section summarizes the findings and contributions of this study.

January 2026, 54 pages

Key Words: Partition theory, partitions with m parts, Faulhaber's formula.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca bana değerli vaktini ayıran, sabırla ve titizlikle yol gösteren ve bilgisiyle her daim bana ışık olan değerli danışman hocam Prof. Dr. Ali Bülent EKİN'e, özverili çalışmaları ve yapıcı eleştirileriyle çalışmalarıma katkı sunan değerli tez izleme komitesi üyeleri Prof. Dr. Murat ŞAHİN ve Prof. Dr. Ercan ALTINIŞIK hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışması süresince maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman benden esirgemeyen, kendilerini örnek aldığım Final Eğitim Kurumları Genel Müdürü Sayın Şevket ERTEM hocama, Mali İşler Sorumlusu değerli kardeşim Sinan TOMAN'a, Biyoloji Bölüm Başkanı Sayın Turan ÇELİK hocama ve bu süreç boyunca her an yanımda olan bir tanecik kızım Beren'imin annesi sevgili eşim Hanife SOYVURAL'a teşekkür ederim.

Yusuf SOYVURAL
Ankara, Ocak 2026

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI
ETİK i
ÖZET ii
ABSTRACT iii
TEŞEKKÜR iv
SİMGELER DİZİNİ vi
1. GİRİŞ 1
1.1 Araştırmanın Amacı ve Önemi 6
1.2 Araştırmanın Yöntemi 18
2. GENEL BİLGİLER 21
2.1 Yineleme Bağıntısı 21
2.2 Bernoulli Polinomları 22
2.3 Faulhaber Formülü 23
3. BULGULAR 25
3.1 P(n,m) nin Tam Değer Fonksiyonu İle İfade Edilmesi 25
3.2 P(n,m) nin $m \leq 10$ İçin Tam Değer Fonksiyonu İle İfade Edilmesi 26
3.2.1 P(n,3) Polinomlarının bulunması 27
3.2.2 P(n,4) Polinomlarının bulunması 29
3.2.3 P(n,5) Polinomlarının bulunması 31
3.2.4 P(n,6) Polinomlarının bulunması 34
3.2.5 P(n,m) Poinomlarının bulunması, $7 \leq m \leq 10$ 36
3.3 P(n,m-1) İfadesinden P(n,m) nin Genel Formunun Bulunması . . 41
3.3.1 P(n,11) Polinomlarının Bulunması 44
3.3.2 P(n,12) Polinomlarının Bulunması 47
4. TARTIŞMA VE SONUÇ 50
KAYNAKLAR 52
ÖZGEÇMİŞ 54

SİMGELER DİZİNİ

$P(n)$	n nin ayrışımlarının sayısı
$P_o(n)$	n nin parçaları tek olan ayrışımlarının sayısı
$P_d(n)$	n nin farklı parçalardan oluşan ayrışımlarının sayısı
D_n	n nin farklı parçalardan oluşan ayrışımlarının kümesi
$\#(\pi)$	π ayrışımının parça sayısı
$s(\pi)$	π ayrışımının en küçük parçası
$d(n)$	n nin pozitif bölenlerinin sayısı
$P(n,m)$	n nin m parçadan oluşan ayrışımlarının sayısı
$P_m(n)$	n nin en çok m parçadan oluşan ayrışımlarının sayısı, n nin parçaları m den büyük olmayan ayrışımlarının sayısı
$f_{r,m}(n)$	n nin m parçalı ayrışımları için periyodu r olan quasi-polinomu
$(w_{r,m})$	$P(n,m)$ polinomları için sonlu sabit terimler dizisi
$w_{r,m}$	$P(n,m)$ polinomlarının sabit terimi
$a_{m,i}$	$P(n,m)$ polinomlarının $(m-i)$.dereceden terimlerinin katsayıları
$\Phi_i(x)$	i. dereceden siklotomik polinom
Q	Rasyonel sayılar kümesi
$Q[x]$	Rasyonel katsayılı polinomlar halkası
ekok	En küçük ortak kat
C_m	$\{1,2,3,\cdots,m\}$ kümesinin elemanların en küçük ortak katı
$A(n,m)$	$P(n,m)$ polinomlarının n den bağımsız olan kısmı
$\beta(n,m)$	$P(n,m)$ polinomlarının n ye bağlı olan kısmı
$B_n(x)$	n-inci Bernoulli polinomu
B_n	n-inci Bernoulli sayısı
$w_{m,m}$	$P(n,m)$ polinomlarının sabit terimlerinin en büyüğü
$S_k(n,m)$	İlk terimi $n-1$, ortak farkı m olan, azalan bir aritmetik dizinin terimlerinin k.dereceden kuvvetler toplamı
$f(n,m)$	$P(n,m)$ polinomlarının en az birinci dereceden terimlerinin toplamı
d	m ile $\{1,2,3,\cdots,\lfloor\frac{m}{2}\rfloor\}$ kümesinin elemanlarının en küçük ortak katı

1. GİRİŞ

Sayılar teorisindeki problemler toplamsal ve çarpımsal olmak üzere iki başlık altında incelenir. Ayrışım teorisi de sayılar teorisinin toplamsal kısmı içinde yer alır. Bir n pozitif tamsayısının ayrışımı, artmayan sırada doğal sayıların toplamı şeklinde yazılımıdır. Yani

$$n = \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_m \ , \ \pi_1 \geq \pi_2 \geq \cdots \geq \pi_m > 0$$

toplamına n nin bir ayrışımı, π_i lere de bu ayrışımın parçaları denir. n nin bütün ayrışımlarının sayısı $P(n)$ ile gösterilir. Özel olarak $P(0) := 1$ olarak tanımlanır.
Örneğin, 5 sayısının ayrışımları

$$5,$$
$$4+1,$$
$$3+2,$$
$$3+1+1,$$
$$2+2+1,$$
$$2+1+1+1,$$
$$1+1+1+1+1$$

olup; $P(5) = 7$ dir.

n nin özel ayrışımları da göz önüne alınabilir. $P_o(n)$, n nin parçaları tek olan ayrışımlarının sayısını ve $P_d(n)$, n nin farklı parçalardan oluşan ayrışımlarının sayısını göstermek üzere; her n için $P_o(n) = P_d(n)$ olduğu Euler tarafından gösterilmiştir (Andrews 1976).
Örneğin; $n = 5$ için

5	5
$3+1+1$	$4+1$
$1+1+1+1+1$	$3+2$
$P_o(5) = 3$	$P_d(5) = 3$

Fokkink, ayrışım teorisi ile çarpımsal sayılar teorisi arasındaki ilginç bir ilişkiyi aşağıdaki çalışmasıyla ortaya koymuştur:

n nin farklı parçalardan oluşan ayrışımlarının kümesi D_n olsun. $\pi \in D_n$ olmak üzere; π ayrışımının parça sayısı $\#(\pi)$, bu ayrışımın en küçük parçası $s(\pi)$ ve n nin pozitif bölenlerinin sayısı $d(n)$ ile gösterilirse

$$d(n) = -\sum_{\pi \in D_n} (-1)^{\#(\pi)} \cdot s(\pi)$$

dir (Fokkink vd. 1995).

Örneğin, 8 sayısının parçaları birbirinden farklı olan ayrışımları

$n = 8$	$\#(\pi)$	$s(\pi)$
8	1	8
$7+1$	2	1
$6+2$	2	2
$5+3$	2	3
$5+2+1$	3	1
$4+3+1$	3	1

biçimindedir.

Bu durumda 8 in pozitif bölenlerinin sayısı

$$d(8) = -[(-1)^1 \cdot 8 + (-1)^2 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 2 + (-1)^2 \cdot 3 + (-1)^3 \cdot 1 + (-1)^3 \cdot 1] = 4$$

bulunur.

Pozitif bölen sayısının ayrışımlar üzerinden ifade edilmesi, sayıların özelliklerinin araştırılmasında ayrışım teorisinin rolünü göstermektedir. Bu nedenle ayrışım biçimlerini ve sayısını bütüncül bir biçimde ifade eden bir yönteme ihtiyaç duyulmaktadır. 1742'de Leonard Euler, bu ihtiyacı karşılayan, ayrışımların sayısı için üreteç fonksiyonunu

$$\prod_{r=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^r} = \sum_{n=0}^{\infty} P(n)\, q^n \quad , \quad |\, q \,| < 1 \tag{1.1}$$

olarak vermiştir (Ahlgren ve Ono 2001).

Üreteç fonksiyonunun açılımında belirli bir yapısal örüntünün ve özel sayı dizilerinin ortaya çıktığı görülmektedir. Bu örüntü, Euler beşgensel sayı teoremi ile açıklanabilmektedir. Euler beşgensel sayı teoremi

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^r)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\,q^{\frac{k(3k-1)}{2}} \tag{1.2}$$

şeklindedir (Ahlgren ve Ono 2001).

Bu formül, ayrışım fonksiyonunun ardışık değerleri arasındaki sistematik yapıyı göstermektedir. Euler'in bu ilişkiyi bir tekrarlama bağıntısına dönüştürdüğü yineleme formülü aşağıdaki gibi elde edilir:
Öncelikle, (1.1) ve (1.2) taraf tarafa çarpılırsa;

$$1=\left(\sum_{n=0}^{\infty}P(n)\,q^n\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\,q^{\frac{k(3k-1)}{2}}\right) \tag{1.3}$$

elde edilir. Daha sonra (1.3) 'te Cauchy çarpımı yapılırsa; $n\geq 1$ için q^n nin katsayısı sıfır olur. Bu durumda Euler beşgensel sayı teoremi için yineleme formülü

$$\sum_{k\in Z}(-1)^k P\left(n-\frac{k(3k-1)}{2}\right)=0 \tag{1.4}$$

olur (Andrews 1983).

Bu formül açık bir biçimde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$P(n)=P(n-1)+P(n-2)-P(n-5)-P(n-7)+P(n-12)+\cdots \tag{1.5}$$

Burada toplam sonsuz gibi görünse de, $n<0$ iken $P(n)=0$ olduğundan sonludur. (1.5) ile verilen yineleme formülü kullanılarak ilk birkaç pozitif n tamsayısı için elde edilen $P(n)$ değerleri aşağıda verilmiştir:

$$
\begin{aligned}
P(1) &= P(0) = 1 \\
P(2) &= P(1) + P(0) = 2 \\
P(3) &= P(2) + P(1) = 3 \\
P(4) &= P(3) + P(2) = 5 \\
P(5) &= P(4) + P(3) - P(0) = 7 \\
P(6) &= P(5) + P(4) - P(1) = 11 \\
P(7) &= P(6) + P(5) - P(2) - P(0) = 15 \\
&\vdots \\
P(10) &= 42 \\
P(100) &= 190569292 \\
P(1000) &= 24061467864032622473692149727991
\end{aligned}
$$

Buradan da anlaşılacağı üzere $P(n)$ çok hızlı büyüyen bir fonksiyondur.

$P(n)$ nin çok hızlı büyümesi hesaplamaları güçleştirir. Bu hesaplama güçlüğü, ayrışım fonksiyonunun asimptotik davranışını açıklayan daha güçlü bir analitik yöntemin gerekliliğini ortaya koyar. Tam da bu noktada ayrışım teorisinde istisnai matematikçilerden biri olan Hint asıllı Srinivasa Ramanujan'ın 1918'de Godfrey Harold Hardy ile birlikte $P(n)$ için verdiği

$$P(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$$

asimptotik formülü devreye girer (Hardy ve Ramanujan 1918).

Ramanujan'ın asimptotik formülü $P(n)$ nin büyüme davranışını anlamada güçlü bir araçtır. Ancak, ayrışım fonksiyonuna ilişkin en çarpıcı keşiflerinden biri belirli aritmetik diziler üzerinden ortaya koyduğu kongrüanslardır. Ramanujan, 1919'da

$$
\begin{aligned}
P(5n+4) &\equiv 0 \pmod 5 \\
P(7n+6) &\equiv 0 \pmod 7 \\
P(11n+6) &\equiv 0 \pmod{11}
\end{aligned}
$$

kongrüanslarını vermiş ve bu kongrüansları analitik yöntemlerle ispatlamıştır. Ramanujan, ayrıca bu kongrüansları

$$\delta = 5^a \cdot 7^b \cdot 11^c \ , \ 24\lambda \equiv 1 \pmod{\delta}$$

olmak üzere;

$$P(\delta n + \lambda) \equiv 0 \pmod{\delta}$$

şeklinde vermiştir. Ancak, S.Chowla ve H.Gupta

$$24 \cdot 243 \equiv 1 \pmod{7^3}$$

olduğu halde,

$$P(243) \not\equiv 13397825934888 \pmod{7^3}$$

olduğunu fark ettiler (Ahlgren ve Ono 2001).
G.N.Watson 1938'de bu sonucu,

$$\delta = 5^a \cdot 7^b \cdot 11^c \ , \ 24\lambda \equiv 1 \pmod{\delta}$$

olmak üzere;

$$P(\delta n + \lambda) \equiv 0 \pmod{5^a \cdot 7^{\lfloor \frac{b}{2} \rfloor + 1} \cdot 11^c}$$

şekline düzenlemiştir (Watson 1938).

F.J.Dyson, "rank" olarak tanımladığı bir ayrışımları sayma yöntemini kullanarak; $P(5n+4) \equiv 0 \pmod{5}$ ve $P(7n+6) \equiv 0 \pmod{7}$ kongrüanslarının ispatlanabileceğini iddia etmiştir.

Pozitif n tamsayısının bir ayrışımı π olsun. Dyson, π nin rankını, π nin en büyük parçası π_1 ve parça sayısı m olmak üzere; $rank(\pi) := \pi_1 - m$ olarak tanımlamıştır. Dyson'ın "rank" ile olan iddiaları ve daha fazlası Atkin ve Swinnerton-Dyer tarafından 1954'te ispatlandı. Dyson, "rank"a benzer bir sayma yöntemi olabileceğini ve $P(11n+6) \equiv 0 \pmod{11}$ kongrüansının bununla çözülebileceğini iddia etti ve bu yönteme "crank" adını verdi. "crank" yöntemi 1988 yılında Andrews ve Garvan tarafından bulundu.

π herhangi bir ayrışım olmak üzere; bu ayrışımın en büyük parçası π_1, ayrışımdaki birlerin sayısı $\omega(\pi)$ ve ayrışımın $\omega(\pi)$ den büyük parçalarının sayısı $\mu(\pi)$ olsun.
π nin crank'ı;

$$c(\pi) := \begin{cases} \pi_1 & , \quad \omega(\pi) = 0 \quad ise \\ \mu(\pi) - \omega(\pi) & , \quad \omega(\pi) > 0 \quad ise \end{cases}$$

olarak tanımlanır (Andrews ve Garvan 1988).

1.1 Araştırmanın Amacı ve Önemi

Ayrışım kombinatorik, matematiksel fizik ve sayılar teorisi gibi çeşitli alanlarda önemli rol oynar. Örneğin; grup teoride S_n simetrik grubunun eşlenik sınıflarının sayısı $P(n)$ ye eşittir.

$P_m(n)$, pozitif n tamsayısının en çok m parçadan oluşan ayrışımlarının sayısını ve $P(n,m)$, pozitif n tamsayısının m parçadan oluşan ayrışımlarının sayısını göstersin. Örnek olarak aşağıda 6 nın ayrışımları verilmiştir.

6	$P(6,1)=1$	
$5+1$		
$4+2$	$P(6,2)=3$	
$3+3$		$P_3(6)=7$
$4+1+1$		
$3+2+1$	$P(6,3)=3$	
$2+2+2$		

Yukarıda, 6 nın ayrışımlarından

$$P_3(6) = P(6,1) + P(6,2) + P(6,3)$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Buradan

$$P_m(n) = \sum_{i=1}^{m} P(n,i).$$

yazılabilir.

Araştırmanın amacını ortaya koymadan önce literatürde $P(n,m)$ nin hesaplanmasına yönelik bazı çalışmalara kısaca yer vermek yararlı olacaktır.

i) Munagi'nin q-kısmi kesir ayrışımı yöntemi

Sills ve Zeilberger (2012)'in aktardığına göre, 1909'da Glaisher tarafından $m \leq 10$ için $P_m(n)$ fonksiyonuna ilişkin formüller elde edilmiştir. Daha sonra bu formüller Gupta tarafından 1958 yılında $m = 11, 12$ durumlarına genişletilmiştir. Munagi, Maple paket programı yardımıyla $m \leq 15$ durumları için elde ettiği formülleri 2005 yılında doktora tezinde vermiş ve keşfettiği $P_m(n)$ nin üreteç fonksiyonunun q-kısmi kesir ayrışımı yöntemi ile $P_m(n)$ için binom katsayılarına dayalı yeni formüller ortaya koymuştur. Sills ve Zeilberger (2012), üreteç fonksiyonunun kesir ayrışımı ile $P_m(n)$ için formüller türetme fikrinin Cayley'e kadar uzandığını da belirtmişlerdir.

Herhangi bir pozitif n tamsayısının en çok m parçadan oluşan ayrışımlarının sayısı, parçaları m den büyük olmayan ayrışımlarının sayısına eşittir (Andrews 1976). $P_m(n)$ için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n\geq 0} P_m(n)\, q^n = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)} \tag{1.6}$$

şeklindedir.

Munagi'nin q-kısmi kesir ayrışımı yöntemine göre $P_m(n)$ şu şekilde hesaplanır: Öncelikle (1.6) ile verilen üreteç fonksiyonunun sağ tarafı, terimleri $\dfrac{1}{(1-q^r)^s}$ olacak biçimde basit kesirlere ayrılır. Daha sonra aynı r değerine sahip terimlerin toplamına Maclourin açılımı yapılarak $\sum_{n\geq 0} c_n\, q^n$ serisi elde edilir. Bu serinin katsayıları belirli periyotlarla tekrar ettiğinden; periyodu r olan uygun bir quasi-polinom ile eşleştirilir.

Periyodu r olan bir quasi-polinomu $P_{1,r,m}(n), P_{2,r,m}(n), \cdots, P_{r-1,r,m}(n), P_{0,r,m}(n)$ polinomlarından oluşan $f_{r,m}(n)$ fonksiyonudur. Bu fonksiyon

$$f_{r,m}(n) = [P_{1,r,m}(n), P_{2,r,m}(n), \cdots, P_{r-1,r,m}(n), P_{0,r,m}(n)] \quad , \quad n \equiv i \pmod{r}$$

ile gösterilir.

Sills ve Zeilberger (2012), Glaisher'e atıfta bulunarak; $f_{r,m}(n)$ nin derecesinin $\left\lfloor \frac{m-r}{r} \right\rfloor$ olduğunu belirtmişlerdir. Burada $\lfloor . \rfloor$ tam değer fonksiyonudur. Böylece

$$f_{r,m}(n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-r}{r} \rfloor} a_i n^i \tag{1.7}$$

yazılabilir. Bu eşitlikten bilinmeyen katsayıları içeren bir doğrusal denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi $n = 0, 1, 2, \cdots, \lfloor \frac{m-r}{r} \rfloor$ değerleri için çözülür. Bulunan çözüm, r periyodunun quasi-polinomunu verir.

Son olarak $1, 2, 3, \cdots, m$ periyotlarına sahip quasi-polinomlarının toplamı alınarak $P_m(n)$ elde edilir. Yani,

$$P_m(n) = \sum_{r=1}^{m} f_{r,m}(n). \tag{1.8}$$

Munagi (2007)'nin q-kısmi kesir ayrışımı yönteminin daha iyi anlaşılması için $P_4(n)$ ün nasıl hesaplandığı aşağıda verilmiştir:

İlk olarak (1.6) ile verilen üreteç fonksiyonu $m = 4$ için, terimleri $\dfrac{1}{(1-q^r)^s}$ olacak biçimde aşağıdaki gibi basit kesirlere ayrılır:

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} P_4(n)\, q^n \;=\; & \frac{\frac{17}{72}}{(1-q)} + \frac{\frac{59}{288}}{(1-q)^2} + \frac{\frac{1}{8}}{(1-q)^3} + \frac{\frac{1}{24}}{(1-q)^4} + \frac{\frac{1}{8}(1-q)}{(1-q^2)} \\ & + \frac{\frac{1}{32}(1-q^2)}{(1-q^2)^2} + \frac{\frac{1}{9}(1+q)}{(1+q+q^2)} + \frac{\frac{1}{8}}{(1+q^2)} \end{aligned} \tag{1.9}$$

(1.9)'da periyodu $r = 1$ olan kesirlerin toplamına Maclourin açılımı yapılırsa;

$$\frac{\frac{17}{72}}{(1-q)} + \frac{\frac{59}{288}}{(1-q)^2} + \frac{\frac{1}{8}}{(1-q)^3} + \frac{\frac{1}{24}}{(1-q)^4} = \frac{175}{288} + \frac{19}{16}\, q + \frac{581}{288}\, q^2 + \frac{113}{36}\, q^3 + \cdots$$

serisi elde edilir. Bu seriyi $f_{1,4}(n)$ quasi-polinomu ile eşleştirmek için (1.7)'den

$$f_{1,4}(n) = [P_{0,1,4}(n)] = \left[a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n + a_0\right]$$

yazılır.

Buradan,

$$\begin{aligned} n=0 \quad ise, \qquad & a_0 = \frac{175}{288} \\ n=1 \quad ise, \qquad & a_3+a_2+a_1+a_0 = \frac{19}{16} \\ n=2 \quad ise, \qquad & 8a_3+4a_2+2a_1+a_0 = \frac{581}{288} \\ n=3 \quad ise, \qquad & 27a_3+9a_2+3a_1+a_0 = \frac{113}{16} \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümü ile

$$f_{1,4}(n) = \left[\frac{1}{144}\,n^3 + \frac{5}{48}\,n^2 + \frac{15}{32}\,n + \frac{175}{288}\right] \tag{1.10}$$

elde edilir.

(1.9)'da periyodu $r=2$ olan kesirlerin toplamına Maclourin açılımı yapılırsa;

$$\frac{\frac{1}{8}(1-q)}{(1-q^2)} + \frac{\frac{1}{32}(1-q)^2}{(1-q^2)^2} = \frac{5}{32} - \frac{3}{16}\,q + \frac{7}{32}\,q^2 - \frac{1}{4}\,q^3 + \cdots$$

serisi elde edilir. (1.7)'den

$$f_{2,4}(n) = [P_{1,2,4}(n), P_{0,2,4}(n)] = [a_3 n + a_1, a_2 n + a_0]$$

yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned} n=0 \quad ise, \qquad & a_0 = \frac{5}{32} \\ n=1 \quad ise, \qquad & a_3+a_1 = -\frac{3}{16} \\ n=2 \quad ise, \qquad & 2a_2+a_0 = \frac{7}{32} \\ n=3 \quad ise, \qquad & 3a_3+a_1 = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklemin sisteminin çözümü ile

$$f_{2,4}(n) = \left[-\frac{1}{32}n - \frac{5}{32}\,,\ \frac{1}{32}n + \frac{5}{32}\right] \tag{1.11}$$

olur. (1.9)'da periyodu $r=3$ olan kesirlerin toplamına Maclourin açılımı yapılırsa

$$\frac{\frac{1}{9}(1+q)}{(1+q+q^2)} = \frac{\frac{1}{9}(1-q^2)}{(1-q^3)} = \frac{1}{9} + 0\cdot q - \frac{1}{9}q^2 + \cdots$$

serisi elde edilir.

(1.7)'den

$$f_{3,4}(n) = [P_{1,3,4}(n), P_{2,3,4}(n), P_{0,3,4}(n)] = [a_1, a_2, a_0]$$

olduğundan;

$$f_{3,4}(n) = \left[0,\, -\frac{1}{9},\, \frac{1}{9}\right] \tag{1.12}$$

olur. (1.9)'da periyodu $r = 4$ olan kesirlerin toplamına Maclourin açılımı yapılırsa;

$$\frac{\frac{1}{8}}{(1+q^2)} = \frac{\frac{1}{8}(1-q^2)}{(1-q^4)} = \frac{1}{8} + 0 \cdot q - \frac{1}{8}\, q^2 + 0 \cdot\, q^3 + \cdots$$

serisi elde edilir. (1.7)'den

$$f_{4,4}(n) = [P_{1,4,4}(n), P_{2,4,4}(n), P_{3,4,4}(n), P_{0,4,4}(n)] = [a_1, a_2, a_3, a_0]$$

yazılır. Buradan

$$f_{4,4}(n) = \left[0,\, -\frac{1}{8},\, 0,\, \frac{1}{8}\right] \tag{1.13}$$

elde edilir.

Son olarak (1.10)-(1.13) denklemleri (1.8)'de yazılırsa;

$$\begin{aligned} P_4(n) \;&=\; \left[\frac{1}{144}\, n^3 + \frac{5}{48}\, n^2 + \frac{15}{32}\, n + \frac{175}{288}\right] + \left[-\frac{1}{32}\, n - \frac{5}{32}, \frac{1}{32}\, n + \frac{5}{32}\right] \\ &\quad + \left[0,\, -\frac{1}{9},\, \frac{1}{9}\right] + \left[0,\, -\frac{1}{8},\, 0,\, \frac{1}{8}\right] \end{aligned} \tag{1.14}$$

bulunur.

Benzer hesaplamalar ile

$$P_3(n) = \left[\frac{1}{12}\, n^2 + \frac{1}{2}\, n + \frac{47}{72}\right] + \left[-\frac{1}{8},\, \frac{1}{8}\right] + \left[-\frac{1}{9},\, -\frac{1}{9},\, \frac{2}{9}\right] \tag{1.15}$$

elde edilir. Burada

$$P(n, m) = P_m(n) - P_{m-1}(n)$$

olduğundan $P_4(n)$ ve $P_3(n)$ nin aynı periyotlu quasi-polinomlarının farkı alınırsa;

$$\begin{aligned} P(n,4) \;&=\; \sum_{r=1}^{4} f_{r,4}(n) - \sum_{r=1}^{3} f_{r,3}(n) \\ &=\; \left[\frac{1}{144}\, n^3 + \frac{1}{48}\, n^2 - \frac{1}{16}\, n - \frac{13}{288}\right] + \left[-\frac{1}{32}\, n - \frac{1}{32}, \frac{1}{32}\, n + \frac{1}{32}\right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{9},\, 0,\, -\frac{1}{9}\right] + \left[0,\, -\frac{1}{8},\, 0,\, \frac{1}{8}\right] \end{aligned}$$

olarak elde edilir.
(1.14)-(1.15) denklemleri ve daha fazlası 1856 da Cayley tarafından bulunmuştur (Sills ve Zeilberger 2012).

ii) Srdanov'un dikey toplama yöntemi

Srdanov (2018), çalışmasında dikey toplam adını verdiği

$$P(n,m) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} P(n - m(i-1) - 1, m-1) \tag{1.16}$$

ifadesini kullanarak; farklı m değerleri için $P(n,m)$ polinomlarının katsayıları arasındaki ilişkileri incelemiş ve $m \leq 7$ için söz konusu polinomların fraktal yapısını ortaya koymuştur.

Dikey toplam yöntemi ile $P(n,4)$ aşağıdaki gibi elde edilir:
Öncelikle, n nin 2 parçalı ayrışımları

$$\begin{gathered}(n-1)+1,\\ (n-2)+2,\\ \vdots\\ (n-k)+k\end{gathered}$$

şeklindedir. $n-k \geq \dfrac{n}{2}$ koşulu sağlandığından $P(n,2) = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ bulunur.

n nin 3 parçalı ayrışımlarının sayısı için (1.16)'da $m=3$ yazılırsa;

$$\begin{aligned} P(n,3) &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} P(n-3(i-1)-1, 2) \\ &= P(n-1,2) + P(n-4,2) + P(n-7,2) + \cdots \\ &= \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-7}{2} \right\rfloor + \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \left\lfloor \frac{n+2-3i}{2} \right\rfloor \end{aligned} \tag{1.17}$$

$n = 6q + r$ olmak üzere; her bir r değeri için (1.17) toplamı hesaplanırsa;

$$P(n,3) = \frac{1}{12}\,n^2 + w_{r,3} \tag{1.18}$$

bulunur. Burada

$$(w_{r,3}) = \left(0, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{12}\right) \quad , \quad n \equiv r \pmod 6.$$

Son olarak n nin 4 parçalı ayrışımlarının sayısı için (1.16)'da $m = 4$ yazılırsa;

$$\begin{aligned} P(n,4) &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} P(n-4(i-1)-1,3) \\ &= P(n-1,3) + P(n-5,3) + P(n-9,3) + \cdots \end{aligned} \tag{1.19}$$

olur. Burada $n = 12q + r$ olmak üzere her bir r değeri için (1.19) toplamı, (1.18) kullanılarak hesaplanırsa;

$$P(n,4) = \frac{1}{144}\,n^3 + \frac{1}{48}\,n^2 + \beta(n,4) + w_{r,4} \tag{1.20}$$

elde edilir. Burada

$$\beta(n,4) = \begin{cases} 0 & , \quad n \equiv 0 \pmod 2 \\ -\dfrac{1}{16}n & , \quad n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

ve $n \equiv r \pmod{12}$ olmak üzere; sonlu $(w_{r,4})$ dizisi

$$(w_{r,4}) = \left(0,\ \frac{5}{144}, -\frac{5}{36}, -\frac{3}{16}, \frac{2}{9}, -\frac{11}{144}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{144}, \frac{1}{9}, -\frac{3}{16}, -\frac{1}{36}, -\frac{11}{144}\right).$$

iii) Srdanov'un yatay toplama yöntemi

Srdanov (2020), $P(n,m)$ polinomlarının $(m-1)$. dereceden olduğunu ve bu polinomların en yüksek dereceli terimden başlayarak $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$. dereceli terime kadar olan terimlerin katsayılarının n den bağımsız olduğunu belirtmiştir.

Ancak, literatür incelendiğinde bu sonuçların ve daha fazlasının Intrator (1968) tarafından da elde edildiği görülmektedir.

Srdanov, sonuçlarına dayanarak $P(n,m)$ polinomlarının genel formunu aşağıdaki gibi vermiştir:

$$P(n,m) = a_{m,1}n^{m-1} + a_{m,2}n^{m-2} + \cdots + a_{m,m-\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} n^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} + \cdots + w_{r,m} \tag{1.21}$$

Burada $w_{r,m}$ sabit terim ve $n \equiv r \pmod{ekok\{1,2,3,\cdots,m\}}$.

Srdanov (2020), yatay toplam olarak adlandırdığı

$$P(n+m,m) = P(n,m) + P(n,m-1) + P(n,m-2) + \cdots + P(n,1) \tag{1.22}$$

yineleme bağıntısı yardımıyla $P(n,m)$ polinomlarının katsayılarını bulmak için yöntemler geliştirmiş ve en yüksek dereceli ilk altı terimin katsayısı için formüller elde etmiştir.

Bu yönteme göre, (1.21)'de verilen $P(n,m)$ polinomlarının genel formu (1.22)'ye uygulanırsa;

$$\begin{aligned} &a_{m,1}(n+m)^{m-1} + a_{m,2}(n+m)^{m-2} + \cdots \\ &= (a_{m,1}n^{m-1} + a_{m,2}n^{m-2} + \cdots) + (a_{m-1,1}n^{m-2} + a_{m-1,2}n^{m-3} + \cdots) + \cdots \end{aligned} \tag{1.23}$$

elde edilir. Daha sonra aynı dereceli terimler eşitlenerek; bu terimlerin katsayıları arasındaki ilişki incelenir.

Buna göre; $k \geq 2$ olmak üzere (1.23)'te $(m-k)$ dereceli terimler karşılaştırılırsa;

$$\sum_{i=1}^{k-1} \left\{ \binom{m-i}{k-i} m^{k-i} a_{m,i} - a_{m-i,k-i} \right\} = 0 \tag{1.24}$$

elde edilir.

Ancak, (1.24) bağıntısı tüm katsayıları elde etmek için yeterli değildir. Bu nedenle aynı kalan sınıfında yer alan farklı pozitif n tamsayıları için $P(n,m)$ değerlerinin bilinmesi gerekir.

Bu yöntemin daha iyi anlaşılması amacıyla $P(n,4)$ polinomlarının katsayıları aşağıda elde edilmiştir:

Öncelikle, $P(n,1)=1$ olduğundan $a_{1,1}=1$ dir. (1.24) denkleminden

$$\begin{aligned} m=2,\ k=2 \quad ise \quad a_{2,1}&=\frac{1}{2},\\ m=3,\ k=2 \quad ise \quad a_{3,1}&=\frac{1}{12},\\ m=4,\ k=2 \quad ise \quad a_{4,1}&=\frac{1}{144} \end{aligned}$$

katsayıları elde edilir. Ancak $m=4$, $k=3$ için elde edilen

$$48\cdot a_{4,1}-a_{3,2}+8\cdot a_{4,2}-a_{2,1}=0$$

denkleminden $a_{4,2}$ katsayısının bulunabilmesi için $a_{3,2}$ katsayısının bilinmesi gerekir. Bu nedenle, elde edilen katsayılar (1.21)'de kullanılır.
Böylece $P(n,3)$ polinomları, $n\equiv r \pmod 6$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} P(n,3) &= a_{3,1}n^2+a_{3,2}n+w_{r,3}\\ &= \frac{1}{12}n^2+a_{3,2}n+w_{r,3} \end{aligned}$$

biçiminde yazılır.
Burada, $\pmod 6$ ya göre aynı kalan sınıfına ait $n=13$ ve $n=7$ için elde edilen

$$\begin{aligned} P(13,3) &= \frac{1}{12}\cdot 13^2+a_{3,2}\cdot 13+w_{1,3}=14\\ P(7,3) &= \frac{1}{12}\cdot 7^2+a_{3,2}\cdot 7+w_{1,3}=4 \end{aligned}$$

denklemleri taraf tarafa çıkarılarak; $a_{3,2}=0$ bulunur. Dolayısıyla, $a_{4,2}=\frac{1}{48}$ olur.
Böylece (1.21)'den $P(n,4)$ polinomları, $n\equiv r \pmod{12}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} P(n,4) &= a_{4,1}\,n^3+a_{4,2}\,n^2+a_{4,3}\,n+w_{r,4}\\ &= \frac{1}{144}\,n^3+\frac{1}{48}\,n^2+a_{4,3}\,n+w_{r,4} \end{aligned}$$

şeklinde yazılır.
Burada, $\pmod{12}$ ye göre aynı kalan sınıfına ait $n=24$ ve $n=12$ için elde edilen

$$\begin{aligned} P(24,4) &= \frac{1}{144}\cdot 24^3+\frac{1}{48}\cdot 24^2+a_{4,3}\cdot 24+w_{0,4}=108\\ P(12,4) &= \frac{1}{144}\cdot 12^3+\frac{2}{48}\cdot 12^2+a_{4,3}\cdot 12+w_{0,4}=15 \end{aligned}$$

denklem sisteminden $a_{4,3}=0$ ve $w_{0,4}=0$ bulunur. Benzer şekilde $n=25$ ve $n=13$ için de elde edilen

$$\begin{aligned} P(25,4) &= \frac{1}{144}\cdot 25^3+\frac{1}{48}\cdot 25^2+a_{4,3}\cdot 25+w_{1,4}=120 \\ P(13,4) &= \frac{1}{144}\cdot 13^3+\frac{2}{48}\cdot 13^2+a_{4,3}\cdot 13+w_{1,4}=18 \end{aligned}$$

denklem sisteminden $a_{4,3}=-\dfrac{1}{16}$ ve $w_{1,4}=\dfrac{5}{144}$ bulunur.
Burada, (mod 12) ye göre her bir kalan sınıfı için, aynı sınıfta yer alan farklı iki n değeri kullanılarak elde edilen $P(n,4)$ lerin farkı alınarak $(w_{r,4})$ sonlu dizisinin 12 terimi elde edilebilir. Böylece (1.20) denklemi elde edilir.

iv) Mattson'un hibrit yöntemi

Mattson Jr (2023), kısmi kesir ayrışımı yöntemi ve tamsayı değerli polinom yaklaşımından oluşan hibrit bir yöntem ile $P_m(n)$ için Q üzerinde polinomlar üretmiştir.

Kısmi kesir ayrışımı yöntemine göre, (1.6) ile verilen üreteç fonksiyonu kısmi kesirlere ayrılarak;

$$P_m(n)=\frac{1}{D_m(x)}=\sum_{j=1}^{m}\frac{a_j}{(1-x)^j}+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{i} \rfloor}\frac{\psi_{i,j}(x)}{\Phi_i^j(x)} \tag{1.25}$$

biçimine dönüştürülür. Burada, $a_j\in Q$ ve $\psi_{i,j}(x)\in Q[x]$ tir.
$\Phi_i(x)$ ise, kökleri 1 in i. dereceden ilkel kökleri olan siklotomik polinomdur. $Q[x]$ üzerinde indirgenemeyen bu polinomların katsayıları tamsayı ve sabit terimleri ∓ 1 dir. Derecesi i olan bir siklotomik polinom,

$$1-x^i=\prod_{d\mid i}\Phi_d(x)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca,

$$D_m(x):=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^m)$$

dir. O halde, $D_m(x)$ aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$D_m(x)=\Phi_1^m(x).\Phi_2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}(x).\Phi_3^{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor}(x)\cdots\Phi_m^1(x)=\prod_{i=1}^{m}\Phi_i^{\lfloor \frac{m}{i} \rfloor}(x)$$

(1.25) ile verilen açılım yardımıyla $j \geq 1 + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ için gelen terimler toplanır ve bu terimlerin katsayıları $\binom{n+j-1}{j-1}$ biçimindedir. Bu nedenle $P_m(n)$ binom katsayılarıyla aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$P_m(n) = \sum_{j=1}^{m} a_j \binom{n+j-1}{j-1} + U(n) \tag{1.26}$$

Burada, $U(n)$ daha düşük dereceli terimleri temsil eder (Mattson Jr, 2023).

Tamsayı değerli polinom yaklaşımı ise, n yi modüler bileşenlerine ayırarak; $P_m(n)$ polinomlarının fraktal yapısını verir. Bu yönteme göre,

$$C_m := ekok\left\{1, 2, 3, \cdots, m\right\} \ , \ n = C_m \cdot q + r \ , \ r = C_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \cdot s + t$$

olarak tanımlanır. Bu durumda $C_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$ tane tamsayı değerli $A_t(q,s)$ polinomu vardır. Bu polinomların q değişkeninde derecesi $m-1$ ve s değişkeninde derecesi en fazla $m-2$ olup;

$$P_m(n) - P_m(r) =: A_t(q,s) \tag{1.27}$$

olarak tanımlanır.

$A_t(q,s)$ polinomunun $P_m(n)$ de q ve s cinsinden elde edilen en yüksek dereceli kısmı t den bağımsız olup; $T_m(q,s)$ ile gösterilir.
$A_t(q,s)$ ve $T_m(q,s)$ aşağıdaki gibidir:

$$A_t(q,s) = T_m(q,s) + \sum_{i=1}^{m-2} \sum_{j=0}^{m-2-i} a_{i,j}(t) \binom{q}{i} \binom{s}{j}$$

ve

$$T_m(q,s) = \frac{C_m^{m-1}}{m!} \sum_{j=0}^{m-2} \frac{1}{m!} \left\{ \frac{C_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}}{C_m} \right\}^j \binom{s}{j} \binom{q}{m-1-j}$$

Eğer $q = 0$ ise $n = r$ olur. Bu nedenle (1.27)'den her t için $A_t(q,s) = 0$ olur.
$P_m(r)$ değerleri ise, (1.16) ile verilen yineleme bağıntısıyla $r \pmod{C_{m-1}}$ için elde edilir (Mattson Jr, 2023).

Mattson Jr (2023), yukarıda anlatılan iki yöntemi birleştirerek; aşağıdaki hibrit formülü vermiştir:

$$P_m(n) - P_m(r) = \sum_{j=1+\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}^{m} a_j \left\{ \binom{n+j-1}{j-1} - \binom{r+j-1}{j-1} \right\} + U_{m,t}(q,s) \quad (1.28)$$

Burada $U_{m,t}(q,s) = U_t \cdot q \ , \ \ U_t \in Q$ dır.

$U_{m,t}(0,s) = 0$ olup; a_j katsayıları kısmi kesir ayrışımından gelir. (1.28)'de ilk toplam kısmi kesir ayrışımının yüksek dereceli terimlerini, $U_{m,t}(q,s)$ ise tamsayı değerli polinomların daha düşük dereceli terimlerini ifade eder (Mattson Jr, 2023).

Hibrit yöntemin daha iyi anlaşılması için $P_4(n)$ aşağıda elde edilmiştir:
$m = 4$ için, $C_4 = 12$, $C_2 = 2$ ve $n = 12q + r$ olup; $r = 2s + t$, $0 \leq t < 2$ dir. (1.28)'den

$$\begin{aligned} P_4(n) - P_4(r) &= \sum_{j=3}^{4} a_j \left\{ \binom{n+j-1}{j-1} - \binom{r+j-1}{j-1} \right\} + U_{4,t}(q,s) \\ &= a_4 \left\{ \binom{n+3}{3} - \binom{r+3}{3} \right\} + a_3 \left\{ \binom{n+2}{2} - \binom{r+2}{2} \right\} \\ &\quad + U_{4,t}(q,s). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Kısmi kesir ayrışımdan gelen $a_4 = \dfrac{1}{24}$ ve $a_3 = \dfrac{1}{8}$ katsayıları (1.29)'da yazılırsa;

$$\begin{aligned} P_4(n) - P_4(r) &= \frac{1}{24} \left\{ \binom{n+3}{3} - \binom{r+3}{3} \right\} + \frac{1}{8} \left\{ \binom{n+2}{2} - \binom{r+2}{2} \right\} \\ &\quad + U_t \cdot q \end{aligned} \quad (1.30)$$

elde edilir.
$t = 0$ için $r = 2s$ ve $n = 12q + 2s$ olup; (1.30) denklemi $(q, r) = (1, 0)$ değerleri için

$$P_4(12) - P_4(0) = \frac{1}{24} \left\{ \binom{15}{3} - \binom{3}{3} \right\} + \frac{1}{8} \left\{ \binom{14}{2} - \binom{2}{2} \right\} + U_0$$

olur. Burada $P_4(12) = 34$ ve $P_4(0) = 1$ olup; $U_0 = \dfrac{17}{6}$ bulunur.
Böylece, $U_{4,0}(q,s) = U_0.q = \dfrac{17}{72}(n - r)$ olur.

$t = 1$ için $r = 2s + 1$ ve $n = 12q + 2s + 1$ olur.

Bu durumda, (1.30) denklemi $(q, r) = (1, 1)$ değerleri için

$$P_4(13) - P_4(1) = \frac{1}{24}\left\{\binom{16}{3} - \binom{4}{3}\right\} + \frac{1}{8}\left\{\binom{15}{2} - \binom{3}{2}\right\} + U_1$$

olur. Burada $P_4(13) = 39$ ve $P_4(1) = 1$ olup; $U_1 = \dfrac{25}{12}$ bulunur.

Böylece, $U_{4,1}(q, s) = U_1.q = \dfrac{25}{144}(n - r)$ olur.

Sonuç olarak, bulunan $U_{4,0}(q, s)$ ve $U_{4,1}(q, s)$ ifadeleri (1.30)'da yazılırsa;

$$\begin{aligned} P_4(n) &= \frac{1}{8}\left\{\binom{n+2}{2} - \binom{r+2}{2}\right\} + \frac{1}{24}\left\{\binom{n+3}{3} - \binom{r+3}{3}\right\} \\ &\quad + \begin{cases} \dfrac{17}{72}(n-r), & n \equiv 0 \pmod 2 \\ \dfrac{25}{144}(n-r), & n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases} + P_4(r) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Literatürdeki çalışmalar, $P(n, m)$ nin polinom biçiminde yazılabilmesi için katsayılarının belirlenmesine ihtiyaç duyulduğunu göstermektedir. Dolayısıyla $P(n, m)$ polinomlarının bulunması $P(n, m-1)$ polinomlarının katsayılarının kullanılmasını gerektirir. Bu tez çalışmasında $P(n, m-1)$ polinomları biliniyorken; $P(n, m)$ polinomlarının genel formülü, Faulhaber formülü biçiminde elde edilmektedir. Ek olarak, $P(n, m)$ polinomlarında sabit terimin hangi koşulda en büyük değerini aldığı ispatlanarak; $P(n, m)$ polinomları tamdeğer fonksiyonu ile verilmektedir. Esasen bu, Srdanov'un (1.21), Mattson'un ise (1.28) ile verdiği denklemlerde $r = m$ olmasıyla eşdeğerdir. Böylece $ekok\,\{1, 2, 3, \cdots, m\}$ tane polinomdan oluşan $P(n, m)$ polinomları $ekok\,\{1, 2, 3, \cdots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor\}$ tane polinoma indirgenmektedir.

1.2 Araştırmanın Yöntemi

Intrator (1968), $1 < m \leq n$ olmak üzere; $P(n, m)$ nin n de tam olarak $(m-1)$. dereceden bir polinom ile verildiğini ve bu polinomda en yüksek dereceli terimin katsayısından başlayarak ilk $\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor$ terimin katsayısının n den bağımsız olduğunu, geri kalanların ise $n \pmod{lcm\{1, 2, 3, \cdots, m\}}$ ye bağlı olduğunu kanıtlamıştır.

Ayrıca, $m \neq 3$ için $P(n,m)$ polinomundaki $\lfloor \frac{m+3}{2} \rfloor$. terimin katsayısının yalnızca n (mod 2) ye bağlı olduğunu kanıtlamıştır.

Intrator'un sonuçlarından yola çıkarak, $m = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor$ olduğundan;

$$P(n,m) = a_{m-1} \cdot n^{m-1} + a_{m-2} \cdot n^{m-2} + \cdots + a_z \cdot n^z + a_{z-1} \cdot n^{z-1} + \cdots + a_1 \cdot n + w_{r,m} \quad (1.31)$$

olarak yazılabilir. Burada $z := \left\lfloor \dfrac{m}{2} \right\rfloor$ dir.

Gupta (1971), $P(n,m)$ polinomunda n^t nin katsayısının $0 \leq t \leq m-1$ olmak üzere, $n \pmod{ekok\,\{1,2,3,\cdots,\lfloor \frac{m}{t+1} \rfloor\}}$ e bağlı olduğunu kanıtlayarak; Intrator'un sonuçlarını genelleştirmiştir.

$C_m := ekok\,\{1,2,3,\cdots,m\}$ olmak üzere; Gupta'nın sonucuna göre $z \leq t \leq m-1$ için a_t katsayıları n den bağımsız olup; a_{z-1} katsayısı $n \pmod 2$ ye,$\cdots$, a_1 katsayısı $n \pmod{C_z}$ ye ve $w_{r,m}$ sabit terimi $n \pmod{C_m}$ ye bağlı olduğundan;

$$n := C_m.q + r \quad , \quad s := n \pmod{C_z} \quad , \quad r := n \pmod{C_m} \qquad (1.32)$$

ve

$$A(n,m) := \sum_{t=z}^{m-1} a_t \cdot n^t \quad , \quad \beta(n,m) := \sum_{t=1}^{z-1} a_{t,\,s} \cdot n^t \qquad (1.33)$$

notasyonları kullanılarak; (1.31) denklemi

$$P(n,m) = A(n,m) + \beta(n,m) + w_{r,m} \qquad (1.34)$$

biçiminde yazılır.
$n \equiv r \pmod{C_m}$ olduğundan $P(n,m) - P(r,m)$ farkı alınarak hem $w_{r,m}$ sabit terimi yok edilir hem de bu fark, yineleme bağıntısı kullanılarak aşağıdaki gibi Faulhaber formülüne dönüştürülür:

$$P(n,m) = (A(x,m) + \beta(x,m))\Big]_r^n + P(r,m)$$

Burada, $f(x)\Big]_a^b := f(b) - f(a)$ dır.

Ayrıca, $w_{r,m} \leq w_{m,m} < 1 + w_{r,m}$ eşitsizliği elde edildikten sonra bu eşitsizlik yardımıyla $P(n,m)$ aşağıdaki gibi tam değer fonksiyonu ile ifade edilir.

$$P(n,m) = \lfloor A(n,m) + \beta(n,m) + w_{m,m} \rfloor$$

Böylece, C_m tane polinomdan oluşan $P(n,m)$ polinomları, C_z tane polinoma indirgenir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Yineleme Bağıntısı

$P(n,m)$ için yineleme bağıntısı

$$P(n,m) = P(n-1,m-1) + P(n-m,m) \tag{2.1}$$

biçimindedir (Intrator 1968).

Lemma 2.1 Herhangi bir pozitif n tamsayısının m parçalı ayrışımlarının sayısı;

i)

$$P(n,m) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} P(n-(i\,m-m+1),\, m-1) \tag{2.2}$$

ii)

$$P(n,m) = \sum_{i=1}^{m} P(n-m,\, i) = P_m(n-m) \tag{2.3}$$

ile verilir.

İspat.

i) Pozitif n tamsayısının herhangi bir ayrışımı aşağıdaki gibi olsun:

$$n = \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_m \quad , \quad \pi_1 \geq \pi_2 \geq \cdots \geq \pi_m > 0$$

Durum 1: $\pi_m = 1$ ise

$\pi_m = 1$ silinirse; $(n-1)$ in $(m-1)$ parçalı bir ayrışımı elde edilir.

Durum 2: $\pi_m > 1$, $k := \pi_m$ ise

Ayrışımın her bir parçasından $(k-1)$ çıkarılırsa; $n-m(k-1)$ in 1 ile biten m parçalı bir ayrışımı elde edilir. Bu ayrışımın 1 olan son parçası çıkarılırsa; $n-m(k-1)-1$ in $(m-1)$ parçalı bir ayrışımı elde edilir.

$n < m$ iken $P(n,m) = 0$ olduğundan; $i = \left\lfloor \dfrac{n}{m} \right\rfloor$ olur. Böylece, ispat(i) tamamlanmış olur.

ii) Pozitif n tamsayısının herhangi bir ayrışımını tekrar aşağıdaki gibi verilsin:

$$n = \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_m \quad , \quad \pi_1 \geq \pi_2 \geq \cdots \geq \pi_m > 0$$

Durum 1: Sondan $(m-i)$ parça 1 ise

Tüm 1 ler silinirse; $n-(m-i)$ nin i parçalı bir ayrışımı elde edilir. Ardından, ayrışımın her bir parçasından 1 çıkarılırsa; $(n-m)$ nin i parçalı bir ayrışımı elde edilir.

Durum 2: Hiç bir parça 1 değilse

Ayrışımım her bir parçasından 1 çıkarılırsa; $(n-m)$ nin m parçalı bir ayrışımı elde edilir. Böylece ispat(ii) tamamlanmış olur.

Şimdi de (2.3) denklemi kullanılarak; (2.1) aşağıdaki gibi ispatlanabilir:
(2.3) denklemi aşağıdaki gibi düzenlenirse;

$$\begin{aligned} P(n,m) &= \sum_{i=1}^{m-1} P((n-1)-(m-1),i) + \sum_{i=m}^{m} P(n-m,i) \\ &= P_{m-1}((n-1)-(m-1)) + P(n-m,m) \\ &= P(n-1,m-1) + P(n-m,m) \end{aligned}$$

ispat tamamlanır. ■

2.2 Bernoulli Polinomları

$B_n(x)$ Bernoulli polinomları aşağıdaki üreteç fonksiyonu yardımıyla bulunur:

$$\frac{z\,e^{zx}}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\,\frac{z^n}{n!} \;\;,\;\; |z| < 2\pi \tag{2.4}$$

Burada $x=0$ olduğunda, $B_n(0)=B_n$, Bernoulli sayıları elde edilir (Howard 1996).

Pozitif k tamsayısı için $B_{2k+1}=0$ olup; ilk birkaç Bernoulli sayısı aşağıda verilmiştir.

$$B_0 = 1\;,\; B_1 = -\frac{1}{2}\;,\; B_2 = \frac{1}{6}\;,\; B_4 = -\frac{1}{30}\;,\; B_6 = \frac{1}{42}\;,\; B_8 = -\frac{1}{30}\;,\; B_{10} = \frac{5}{66}$$

(2.4) denklemi,

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{z^n}{n!} = \frac{z}{e^z-1}e^{zx} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\frac{z^n}{n!}\right) \tag{2.5}$$

biçiminde yazıldıktan sonra Cauchy çarpımı yapılıp z^n li terimlerin katsayıları eşitlenirse; Bernoulli polinomları

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \, (x)^{n-k} \tag{2.6}$$

biçiminde elde edilir (Guo 1999).

Bernoulli sayıları için yineleme bağıntısı ise aşağıdaki gibi elde edilir:
Öncelikle

$$\frac{z\ e^{(z+1)x}}{e^z - 1} - \frac{z\ e^{zx}}{e^z - 1} = z\ e^{zx}$$

olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x+1) - B_n(x)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\, z^{n+1} \tag{2.7}$$

yazılabilir.
(2.7) denkleminde z^n li terimlerin katsayıları eşitlenerek;

$$B_n(x+1) - B_n(x) = n\, x^{n-1} \tag{2.8}$$

bulunur.
Burada, $x = 0$ için $B_n(1) = B_n(0) = B_n$, $n \neq 1$ elde edilir.
Buna göre, (2.6)'da $x = 1$ yazılarak; $n \geq 2$ için Bernoulli sayılarını hesaplamaya yarayan yineleme bağıntısı

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \tag{2.9}$$

olur (Guo 1999).

2.3 Faulhaber Formülü

Pozitif bir m tamsayısı için, $C_m := ekok\,\{1, 2, 3, \cdots, m\}$ olsun. Herhangi bir pozitif n tamsayısı için, q ve r birer tamsayı olmak üzere; Euclid algoritması ile

$$n = C_m.q + r \ \ , \ \ 0 \leq r < C_m$$

yazılabilir. Eğer, $r < m$ ise

$$S_k(n, m) := \sum_{i=0}^{l_m} [n - (1 + im)]^k$$

olarak tanımlansın. Burada, $l_m = \dfrac{n-r}{m} - 1$ dir.

Lemma 2.2 İlk terimi $(n-1)$ ve ortak farkı m olan azalan bir aritmetik dizinin ardışık terimlerinin k.dereceden kuvvetler toplamı, Faulhaber formülü biçiminde aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$S_k(n,m) = \frac{m^k}{k+1}\left\{B_{k+1}\left(\frac{n-1}{m}+1\right) - B_{k+1}\left(\frac{r-1}{m}+1\right)\right\} \tag{2.10}$$

İspat.

(2.8) denkleminde n yerine $k+1$ yazıldıktan sonra x yerine sırasıyla

$$\frac{n-1}{m}\,,\ \frac{n-1}{m}-1\,,\ \frac{n-1}{m}-2\,,\ \cdots\,,\ \frac{n-1}{m}-l_m$$

değerleri yazılarak elde edilen l_m+1 tane denklem taraf tarafa toplanırsa; ispat tamamlanır. ■

Howard (1996) ve Bazso (2015), bu tezde kullanılan aritmetik diziden farklı diziler için (2.10) ile verilen denkleme benzer sonuçlar elde etmişlerdir.

(2.10), ardışık terimleri $(n-1),(n-1-m),(n-1-2m),\cdots$ biçiminde olan bir aritmetik dizinin terimlerinin kuvvetleri toplamının kısa yoldan bulunmasını sağlar.

Örneğin; $(n-1)^3+(n-5)^3+(n-9)^3+\cdots+(n-(1+4\cdot l_4))^3$ toplamı aşağıdaki gibi hesaplanır:

Tanımdan dolayı $m=4$ olup; $C_4=12$, $n=12\,q+r$ ve $l_4=3\,q-1$ dir. (2.10)'dan

$$\begin{aligned} S_3(n,4) &= \sum_{i=0}^{l_4}[n-(1+4\cdot i)]^3 \\ &= \frac{4^3}{3+1}\left\{B_4\left(\frac{n-1}{4}+1\right) - B_4\left(\frac{r-1}{4}+1\right)\right\} \end{aligned} \tag{2.11}$$

yazılabilir. Burada, $B_4\left(\frac{n-1}{4}+1\right)$ ve $B_4\left(\frac{r-1}{4}+1\right)$ Bernoulli polinomları, (2.6) ile hesaplanıp (2.11)'de yazılırsa;

$$\begin{aligned} S_3(n,4) &= 16\left\{\sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}B_k\left(\frac{n-1}{4}+1\right)^{4-k} - \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}B_k\left(\frac{r-1}{4}+1\right)^{4-k}\right\} \\ &= \left(\frac{n^4}{16}+\frac{n^3}{4}-\frac{n^2}{8}-\frac{3\,n}{4}+\frac{7}{240}\right) - \left(\frac{r^4}{16}+\frac{r^3}{4}-\frac{r^2}{8}-\frac{3\,r}{4}+\frac{7}{240}\right) \\ &= \left(\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{4}x\right)\Bigg]_r^n \end{aligned}$$

elde edilir.

3. BULGULAR

3.1 P(n,m) nin Tam Değer Fonksiyonu İle İfade Edilmesi

(1.32)'de $n \equiv r \pmod{C_m}$ olduğundan, (1.34)'te n yerine r yazılırsa;

$$P(r,m) = A(r,m) + \beta(r,m) + w_{r,m} \tag{3.1}$$

elde edilir. Buradan anlaşıldığı üzere $P(n,m)$ ve $P(r,m)$ nin sabit terimleri eşit ve $w_{r,m}$ dir. Bu nedenle, (1.34) ve (3.1) denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa;

$$P(n,m) = \left(A(x,m) + \beta(x,m)\right)\Big]_r^n + P(r,m) \tag{3.2}$$

elde edilir. Son olarak (1.34) ve (3.2) eşitlenirse;

$$w_{r,m} = -\left(A(r,m) + \beta(r,m)\right) + P(r,m) \tag{3.3}$$

bulunur.

Lemma 3.1 $0 \leq r < C_m$ olmak üzere herhangi bir r için;

$$(w_{r,m}) := (w_{0,m}, w_{1,m}, w_{2,m}, \cdots, w_{C_m-1,m})$$

sonlu dizisinin en büyük terimi $r = m$ için elde edilir. Bu durumda,

$$w_{r,m} \leq w_{m,m} < w_{r,m} + 1 \tag{3.4}$$

olduğundan $P(n,m)$, tamdeğer fonksiyonu ile aşağıdaki gibi verilir.

$$P(n,m) = \lfloor A(n,m) + \beta(n,m) + w_{m,m} \rfloor \tag{3.5}$$

İspat.
$f(n,m) := A(n,m) + \beta(n,m)$ olsun. $n \geq r$ olduğundan $P(n,m) \geq P(r,m)$ dir.
Bu nedenle (3.2)'den $f(n,m) \geq f(r,m)$ olur.

Durum 1: $r = m$ ise
(3.3)'ten $w_{m,m} = -f(m,m) + 1$ bulunur.

Durum 2: $r < m$ ise

(3.3)'ten $w_{r,m} = -f(r,m)$ ve $f(r,m) < f(m,m)$ dir. Bu nedenle,

$$\begin{aligned} -f(r,m)+1 &> -f(m,m)+1, \\ w_{r,m}+1 &> w_{m,m} \end{aligned}$$

elde edilir.

Durum 3: $r > m$ ise

(3.3)'ten $w_{r,m} = -f(r,m) + P(r,m)$ ve $f(r,m) \geq f(m,m)$ olur.

Ayrıca, $P(r,m) \geq 1$ olduğu açıktır. Bu nedenle

$$\begin{aligned} -f(r,m)+P(r,m) &\geq -f(r,m)+1, \\ w_{r,m} &\geq -f(r,m)+1, \\ w_{r,m} &\geq -f(r,m)+1-f(m,m)+f(m,m), \\ w_{r,m} &\geq w_{m,m}-(f(r,m)-f(m,m)) \end{aligned} \tag{3.6}$$

yazılabilir.

$k := f(r,m) - f(m,m)$ olsun. Bu durumda (3.6) eşitsizliği

$$w_{r,m} + k \geq w_{m,m}$$

olur. Burada, $k \geq 0$ dır.

İkinci ve üçüncü durumlar karşılaştırılırsa $0 \leq k \leq 1$ olur. Bu durumda k ya bağlı olarak (3.4) elde edilir. Son olarak, bulunan (3.4) eşitsizliğinin her tarafına $f(n,m)$ eklenirse ispat tamamlanır. ■

3.2 P(n,m) nin $m \leq 10$ İçin Tam Değer Fonksiyonu İle İfade Edilmesi

$P(n,0) = 1$ olduğu açıktır. Ayrıca,

$$P(n,2) = \frac{n}{2} + w_{r,2} \ , \ (w_{r,2}) = \left(0, -\frac{1}{2}\right) \ , \ n \equiv r \pmod 2 \tag{3.7}$$

olduğu literatürden (Srdanov 2020) bilinmektedir.

$P(n,m)$ polinomları, $m \geq 3$ için tam değer fonksiyonu ile aşağıdaki gibi ifade edilir:

3.2.1 P(n,3) Polinomlarının bulunması

(1.32)'den $m = 3$ için $C_3 = 6$ ve $n = 6q + r$, $0 \leq r < 6$ dır. (2.2)'den

$$\begin{aligned} P(n,\,3) &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} P(n-(3i-2),\,2) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ r<3}}^{2q} P(n-(3i-2),\,2) + \sum_{\substack{i=2q+1 \\ r\geq 3}}^{2q+1} P(n-(3i-2),\,2) \\ &= P(n-1,\,2) + P(n-4,\,2) + ... + P(n-(6q-2),\,2) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{1} P(r-(3i-2),\,2) \end{aligned}$$

yazılır. Burada, 2 parçalı ayrışımların sayısı için (3.7) kullanılırsa;

$$\begin{aligned} P(n,\,3) &= \frac{1}{2}\left[(n-1)+(n-4)+...+(n-(6q-2))\right] + q\,(w_{1,\,2}+w_{0,\,2}) \\ &\quad + P(r-1,\,2) \end{aligned} \tag{3.8}$$

elde edilir.

$r < 6$ iken $P(r-3, 3) = 0$ olduğundan (2.1) yineleme bağıntısı ile

$$P(r,3) = P(r-1,2) + P(r-3,3) = P(r-1,2)$$

dir. Böylece (3.8) denklemi, (2.10) yardımıyla $k = 1$ için yeniden düzenlenirse;

$$\begin{aligned} P(n,\,3) &= \frac{1}{2}\,S_1(n,\,3) + q\,(w_{1,\,2}+w_{0,\,2}) + P(r,\,3) \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{3^1}{1+1}\left\{B_2\left(\frac{n-1}{3}+1\right) - B_2\left(\frac{r-1}{3}+1\right)\right\} + q\,\left(0-\frac{1}{2}\right) \\ &\quad + P(r,3) \end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.9)'da Bernoulli polinomları (2.6) ile hesaplanır ve $q = \dfrac{n-r}{6}$ yazılırsa;

$$P(n,3) = \left\{\frac{3}{2^2}\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}\cdot B_k \cdot \left(\frac{n-1}{3}+1\right)^k - \frac{1}{2}\,\frac{n}{6}\right\}\Bigg]_r^n + P(r,3)$$

elde edilir.

Buradan,

$$P(n,3) = \frac{1}{3!.2}\, x^2 \Big]_r^n + P(r,3) \tag{3.10}$$

bulunur.

$0 \le r < 3$ için $P(r,3) = 0$, $3 \le r < 5$ için $P(r,3) = 1$ ve $r = 5$ için $P(r,3) = 2$ dir. Bu durumda (3.3)'ten $P(n,3)$ polinomlarının sabit terimleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
w_{0,3} &= -\left(\frac{0^2}{3!\cdot 2}\right) + P(0,3) = 0 && , r = 0 \ ise \\
w_{1,3} &= -\left(\frac{1^2}{3!\cdot 2}\right) + P(1,3) = -\frac{1}{3!\cdot 2} && , r = 1 \ ise \\
w_{2,3} &= -\left(\frac{2^2}{3!\cdot 2}\right) + P(2,3) = -\frac{1}{3} && , r = 2 \ ise \\
w_{3,3} &= -\left(\frac{3^2}{3!\cdot 2}\right) + P(3,3) = \frac{1}{2^2} && , r = 3 \ ise \\
w_{4,3} &= -\left(\frac{2^4}{3!\cdot 2}\right) + P(4,3) = -\frac{1}{3} && , r = 4 \ ise \\
w_{5,3} &= -\left(\frac{5^2}{3!\cdot 2}\right) + P(5,3) = -\frac{1}{3!\cdot 2} && , r = 5 \ ise
\end{aligned}$$

Böylece, (3.10) ile elde edilen sonuç, literatürde (Srdanov 2020) verilen aşağıdaki formül ile tam uyumludur.

$$P(n,3) = \frac{1}{3!.2}\, n^2 + w_{r,3} \tag{3.11}$$

Burada

$$(w_{r,3}) = \left(0, -\frac{1}{3!\cdot 2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2^2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3!\cdot 2}\right), \quad n \equiv r \pmod 6$$

olup; (3.5)'ten $P(n,3)$ tam değer fonksiyonu ile aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$P(n,3) = \left\lfloor \frac{1}{3!.2}\, n^2 + \frac{1}{2^2} \right\rfloor \tag{3.12}$$

3.2.2 P(n,4) Polinomlarının bulunması

(1.32)'den $m = 4$ için $C_4 = 12$ ve $n = 12\,q + r,\ 0 \le r < 12$ dir. (2.2)'den

$$\begin{aligned} P(n,\,4) &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} P(n-(4i-3),\,3) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ r<4}}^{3q} P(n-(4i-3),\,3) + \sum_{\substack{i=3q+1 \\ r\ge 4}}^{3q+2} P(n-(4i-3),\,3) \\ &= P(n-1,3) + P(n-5,3) + \cdots + P(n-(12q-3),3) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2} P(r-(4i-3),3) \end{aligned}$$

yazılır.

Burada, 3 parçalı ayrışımların sayısı için (3.11) kullanılırsa;

$$\begin{aligned} P(n,\,4) &= \frac{1}{3!\cdot 2}\left[(n-1)^2 + (n-5)^2 + (n-9)^2 + ... + (n-(12q-3))^2\right] \\ &\quad + q \left\{ \begin{array}{lll} w_{5,3} + w_{1,3} + w_{3,3} & , & n \equiv 0 \pmod 2 \\ w_{0,3} + w_{2,3} + w_{4,3} & , & n \equiv 1 \pmod 2 \end{array} \right\} + P(r,4) \end{aligned} \tag{3.13}$$

olur.

Böylece, (3.13) denklemi (2.10) yardımıyla $k = 2$ için yeniden düzenlenirse;

$$\begin{aligned} P(n,4) &= \frac{1}{3!.2}\,S_2(n,\,4) + q \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{1}{3!\cdot 2} & , & n \equiv 0 \pmod 2 \\ -\dfrac{2}{3} & , & n \equiv 1 \pmod 2 \end{array} \right\} + P(r,4) \\ &= \frac{1}{3!.2}\,\frac{4^2}{2+1}\left\{ B_3\left(\frac{n-1}{4}+1\right) - B_3\left(\frac{r-1}{4}+1\right)\right\} \\ &\quad + q \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{1}{3!.2} & , & n \equiv 0 \pmod 2 \\ -\dfrac{2}{3} & , & n \equiv 1 \pmod 2 \end{array} \right\} + P(r,4) \end{aligned} \tag{3.14}$$

elde edilir.

(3.14)'te Bernoulli polinomları (2.6) ile hesaplanır ve $q = \dfrac{n-r}{12}$ yazılırsa;

$$\begin{aligned} P(n,4) &= \left(\frac{2^4}{(3!)^2} \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \cdot B_k \cdot \left(\frac{n-1}{4} + 1 \right)^k \right. \\ &\quad \left. + \frac{n}{12} \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{3! \cdot 2} & , \quad n \equiv 0 \pmod 2 \\ -\dfrac{2}{3} & , \quad n \equiv 1 \pmod 2 \end{array} \right\} \right) \Bigg]_r^n + P(r,4) \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$P(n,\,4) = \left(\frac{1}{4! \cdot 3!}\, x^3 + \frac{1}{4! \cdot 2}\, x^2 + \beta(x,4) \right) \Bigg]_r^n + P(r,4) \tag{3.15}$$

olarak bulunur. Burada,

$$\beta(x,4) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & , \quad n \equiv 0 \pmod 2 \\ -\dfrac{1}{2^4} & , \quad n \equiv 1 \pmod 2 \end{array} \right.$$

Buradan $P(n,4)$ ün polinom olarak yazılabilmesi, $0 \leq r < 12$ için $w_{r,4}$ değerlerinin bilinmesini gerektirir. Bu değerler, $m = 3$ durumunda olduğu gibi $P(r,4)$ değerlerinin bilinmesi ile mümkündür.

Ancak, burada ilk olarak (3.3) ile sadece $w_{4,4}$ değeri hesaplanır.

$$w_{4,4} = -\left(\frac{1}{4!.3!}.4^3 + \frac{1}{4!.2}.4^2 \right) + P(4,4) = \frac{2}{3^2}$$

Daha sonra, bulunan bu $w_{4,4}$ değeri (3.5)'te yerine yazılarak $P(n,4)$ tam değer fonksiyonu ile aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$P(n,\,4) = \left\lfloor \frac{1}{4!.3!}\, n^3 + \frac{1}{4!.2}\, n^2 + \beta(n,4) + \frac{2}{3^2} \right\rfloor \tag{3.16}$$

Bundan sonra $w_{r,4}$ değerlerinin hesaplanmasını mümkün kılan $P(r,4)$ değerleri (3.16) ile hesaplanabilir. Elde edilen (3.15) denklemi, literatürde (Srdanov 2020) verilen aşağıdaki formül ile örtüşmektedir.

$$P(n,\,4) = \frac{1}{4! \cdot 3!}\, n^3 + \frac{1}{4! \cdot 2}\, n^2 + \beta(n,4) + w_{r,4} \tag{3.17}$$

Burada,

$$\beta(n,4)=\begin{cases} 0 & , \quad n\equiv 0 \pmod 2 \\ -\dfrac{1}{2^4} & , \quad n\equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$$

ve $(w_{r,4})$ sonlu dizisi

$$(w_{r,\,4})=\left(0,\frac{5}{4!\cdot 3!},-\frac{5}{(3!)^2},-\frac{3}{2^4},\frac{2}{3^2},-\frac{11}{4!\cdot 3!},-\frac{1}{2^2},\frac{5}{4!\cdot 3!},\frac{1}{3^2},-\frac{3}{2^4},-\frac{1}{(3!)^2},-\frac{11}{4!\cdot 3!}\right)$$

biçimindedir.

3.2.3 P(n,5) Polinomlarının bulunması

(1.32)'den $m=5$ için $C_5=60$ ve $n=60\,q+r,\ \ 0\le r<60$ tır. (2.2)'den

$$\begin{aligned} P(n,5) &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor} P(n-(5i-4),4) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ r<5}}^{12q} P(n-(5i-4)+\sum_{\substack{i=12q+1 \\ r\ge 5}}^{12q+11} P(n-(5i-4),4) \\ &= P(n-1,4)+P(n-6,4)+\cdots+P(n-(60q-4),4) \\ &\quad +\sum_{i=1}^{11} P(r-(5i-4),4) \end{aligned}$$

yazılır. Burada 4 parçalı ayrışımların sayısı için (3.17) kullanılırsa;

$$\begin{aligned} P(n,5) &= \frac{1}{4!.3!}\left[(n-1)^3+(n-6)^3+...+(n-(60q-4))^3\right] \\ &\quad +\frac{1}{4!.2}\left[(n-1)^2+(n-6)^2+...+(n-(60q-4))^2\right] \\ &\quad -\frac{1}{2^4}\begin{cases} (n-1)+(n-11)+\cdots+(n-(60q-9))\ , & n\equiv 0 \pmod 2 \\ (n-6)+(n-16)+\cdots+(n-(60q-4))\ , & n\equiv 1 \pmod 2 \end{cases} \\ &\quad +q\begin{cases} w_{11,4}+w_{6,4}+w_{1,4}+w_{8,4}+w_{3,4}+w_{10,4} & \\ +w_{5,4}+w_{0,4}+w_{7,4}+w_{2,4}+w_{9,4}+w_{4,4} & , \quad n\equiv 0 \pmod 2 \\ w_{0,4}+w_{7,4}+w_{2,4}+w_{9,4}+w_{4,4}+w_{11,4} & \\ +w_{6,4}+w_{1,4}+w_{8,4}+w_{3,4}+w_{10,4}+w_{5,4} & , \quad n\equiv 1 \pmod 2 \end{cases} \\ &\quad +P(r,5) \end{aligned} \tag{3.18}$$

olur. Böylece, (3.18) denklemi (2.10) yardımıyla $k = 3$ için yeniden düzenlenirse;

$$\begin{aligned} P(n,5) &= \frac{1}{4!\cdot 3!}\, S_3(n,5) + \frac{1}{4!\cdot 2}\, S_2(n,5) \\ &\quad -\frac{1}{2^4} \left\{ \begin{array}{lll} S_1(n,10) & , & n \equiv 0 \pmod 2 \\ S_1(n-5,10) & , & n \equiv 1 \pmod 2 \end{array} \right\} \\ &\quad -\frac{13}{4!}\, q + P(r,5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(n,5) &= \frac{1}{4!.3!}\, \frac{5^3}{3+1} \left\{ B_4\left(\frac{n-1}{5}+1\right) - B_4\left(\frac{r-1}{5}+1\right) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{4!.2}\, \frac{5^2}{2+1} \left\{ B_3\left(\frac{n-1}{5}+1\right) - B_3\left(\frac{r-1}{5}+1\right) \right\} \\ &\quad -\frac{1}{2^4}\, \frac{10}{1+1} \left\{ \begin{array}{lll} B_2\left(\frac{n-1}{10}+1\right) - B_2\left(\frac{r-1}{10}+1\right) & , & n \equiv 0 \pmod 2 \\ B_2\left(\frac{n-6}{10}+1\right) - B_2\left(\frac{r-6}{10}+1\right) & , & n \equiv 1 \pmod 2 \end{array} \right\} \\ &\quad -\frac{13}{4!}\, q + P(r,5) \end{aligned}$$

bulunur.

Burada, önceki hesaplamalarda olduğu gibi Bernoulli polinomları (2.6) ile hesaplanır ve $q = \dfrac{n-r}{60}$ yazılırsa;

$$P(n,5) = \left(\frac{1}{5!\cdot 4!}\, x^4 + \frac{1}{4!\cdot 3!\cdot 2}\, x^3 + \frac{1}{4!\cdot 3!\cdot 2}\, x^2 + \beta(x,5) \right) \Bigg]_r^n + P(r,5) \qquad (3.19)$$

elde edilir. Burada,

$$\beta(n,5) = \left\{ \begin{array}{lll} -\frac{1}{4!}\, x & , & n \equiv 0 \pmod 2 \\ -\frac{1}{4!\cdot 2^2}\, x & , & n \equiv 1 \pmod 2 \end{array} \right.$$

dir.

r nin 60 değeri olduğundan elde edilen (3.19) denklemi, literatürde (Srdanov 2020) verilen aşağıdaki formül ile uyumludur.

$$P(n,5) = \frac{1}{5!.4!}\,n^4 + \frac{1}{4!.3!.2}\,n^3 + \frac{1}{4!.3!.2}\,n^2 + \beta(n,5) + w_{r,\,5} \tag{3.20}$$

Ancak, $w_{r,5}$ en büyük değerini $r = 5$ için aldığından burada sadece $w_{5,5}$ hesaplanır.

$$w_{5,5} = -\left(\frac{1}{5!\cdot 4!}\cdot 5^4 + \frac{1}{4!\cdot 3!\cdot 2}\cdot 5^3 + \frac{1}{4!\cdot 3!\cdot 2}\cdot 5^2 - \frac{1}{4!\cdot 2^2}\cdot 5\right) + 1 = \frac{181}{(4!)^2}$$

Böylece, (3.20) tam değer fonksiyonu ile aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$P(n,5) = \left\lfloor \frac{1}{5!\cdot 4!}\,n^4 + \frac{1}{4!\cdot 3!\cdot 2}n^3 + \frac{1}{4!\cdot 3!\cdot 2}n^2 + \beta(n,5) + \frac{181}{(4!)^2}\right\rfloor \tag{3.21}$$

Örnek olarak $P(101,5)$ aşağıdaki gibi hesaplanır:
Eğer hesaplama (3.19) ile yapılırsa;

$$\begin{aligned} P(101,5) &= \left(\frac{1}{5!\cdot 4!}\,x^4 + \frac{1}{4!\cdot 3!\cdot 2}\,x^3 + \frac{1}{4!\cdot 3!\cdot 2}\,x^2 - \frac{1}{4!\cdot 2^2}\,x\right)\Bigg]_{41}^{101} + P(r,5) \\ &= 38518 + P(41,5) \end{aligned}$$

olur. Burada, $P(41,5)$ değerine ihtiyaç duyulur. Bunun için (3.21) denklemi kullanılarak;

$$P(41,5) = \left\lfloor \frac{41^4}{5!\cdot 4!} + \frac{41^3}{4!\cdot 3!\cdot 2} + \frac{41^2}{4!\cdot 3!\cdot 2} - \frac{41}{4!\cdot 2^2} + \frac{181}{(4!)^2}\right\rfloor = 1226$$

bulunur. Böylece, $P(101,5) = 38518 + 1226 = 39744$ olur.
Fakat, $P(101,5)$ tek adımda (3.21) ile aşağıdaki gibi de hesaplanabilir:

$$P(101,5) = \left\lfloor \frac{101^4}{5!\cdot 4!} + \frac{101^3}{4!\cdot 3!\cdot 2} + \frac{101^2}{4!\cdot 3!\cdot 2} - \frac{101}{4!\cdot 2^2} + \frac{181}{(4!)^2}\right\rfloor = 39744$$

3.2.4 P(n,6) Polinomlarının bulunması

(1.32)'den $m = 6$ için $C_6 = 60$ ve $n = 60\,q + r$, $0 \le r < 60$ dır. (2.2)'den

$$\begin{aligned} P(n,6) &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor} P(n-(6i-5),5) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ r<6}}^{10q} P(n-(6i-5) + \sum_{\substack{i=10q+1 \\ r\ge 6}}^{10q+9} P(n-(6i-5),5) \\ &= P(n-1,5) + P(n-7,5) + \cdots + P(n-(60q-5),5) \\ &= +\sum_{i=1}^{9} P(r-(6i-5),5) \end{aligned} \tag{3.22}$$

yazılabilir. (3.22)'de 5 parçalı ayrışımların sayısı için (3.20) kullanılır. Ardından, (3.22) denklemi (2.10) yardımıyla $k = 4$ için yeniden düzenlenirse;

$$\begin{aligned} P(n,6) &= \frac{1}{5!\cdot 4!}\,S_4(n,6) + \frac{1}{4!\cdot 3!\cdot 2}\,S_3(n,6) + \frac{1}{4!\cdot 3!\cdot 2}\,S_2(n,6) \\ &+ \begin{cases} -\dfrac{1}{4!\cdot 2^2}\ S_1(n,6) & , \quad n \equiv 0 \pmod 2 \\ -\dfrac{1}{4!}\ S_1(n,6) & , \quad n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases} \\ &+ q \begin{cases} w_{59,5} + w_{53,5} + w_{47,5} + w_{41,5} + w_{35,5} & \\ \quad + w_{29,5} + w_{23,5} + w_{17,5} + w_{11,5} + w_{5,5} & , \quad n \equiv 0 \pmod 6 \\ w_{0,5} + w_{54,5} + w_{48,5} + w_{42,5} + w_{36,5} & \\ \quad + w_{30,5} + w_{24,5} + w_{18,5} + w_{12,5} + w_{6,5} & , \quad n \equiv 1 \pmod 6 \\ w_{1,5} + w_{55,5} + w_{49,5} + w_{43,5} + w_{37,5} & \\ \quad + w_{31,5} + w_{25,5} + w_{19,5} + w_{13,5} + w_{7,5} & , \quad n \equiv 2 \pmod 6 \\ w_{2,5} + w_{56,5} + w_{50,5} + w_{44,5} + w_{38,5} & \\ \quad + w_{32,5} + w_{26,5} + w_{20,5} + w_{14,5} + w_{8,5} & , \quad n \equiv 3 \pmod 6 \\ w_{3,5} + w_{57,5} + w_{51,5} + w_{45,5} + w_{39,5} & \\ \quad + w_{33,5} + w_{27,5} + w_{21,5} + w_{15,5} + w_{9,5} & , \quad n \equiv 4 \pmod 6 \\ w_{4,5} + w_{58,5} + w_{52,5} + w_{46,5} + w_{40,5} & \\ \quad + w_{34,5} + w_{28,5} + w_{22,5} + w_{16,5} + w_{10,5} & , \quad n \equiv 5 \pmod 6 \end{cases} \\ &+ P(r,6) \end{aligned} \tag{3.23}$$

olur. Buradan, (3.23) denklemi

$$\begin{aligned}
P(n,6) &= \frac{1}{5!\cdot 4!}\frac{6^4}{5}\left\{B_5\left(\frac{n-1}{6}+1\right)-B_5\left(\frac{r-1}{6}+1\right)\right\} \\
&+\frac{1}{4!\cdot 3!\cdot 2}\frac{6^3}{4}\left\{B_4\left(\frac{n-1}{6}+1\right)-B_4\left(\frac{r-1}{6}+1\right)\right\} \\
&+\frac{1}{4!\cdot 3!\cdot 2}\frac{6^2}{3}\left\{B_3\left(\frac{n-1}{6}+1\right)-B_3\left(\frac{r-1}{6}+1\right)\right\} \\
&-\frac{3}{4!}\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{2^2}\left\{B_2\left(\frac{n-1}{6}+1\right)-B_2\left(\frac{r-1}{6}+1\right)\right\} & ,n\equiv 0 \pmod 2 \\ B_2\left(\frac{n-1}{6}+1\right)-B_2\left(\frac{r-1}{6}+1\right) & ,n\equiv 1 \pmod 2 \end{array}\right\} \\
&+q\left\{\begin{array}{ll} \frac{1321}{6!\cdot 2} & , \quad n\equiv 0 \pmod 6 \\ -\frac{3\cdot 13}{2^5\cdot 5} & , \quad n\equiv \mp 1 \pmod 6 \\ -\frac{31}{2^5\cdot 5} & , \quad n\equiv \mp 2 \pmod 6 \\ \frac{7^2}{5!\cdot 3} & , \quad n\equiv 3 \pmod 6 \end{array}\right\}+P(r,6)
\end{aligned}$$

olur. Burada, Bernoulli polinomları (2.6) ile hesaplanır ve $n=\dfrac{n-r}{60}$ yazılırsa;

$$P(n,\,6)=\left(\frac{1}{6!\cdot 5!}\,x^5+\frac{1}{5!\cdot 2^5}\,x^4+\frac{19}{6!\cdot 3!\cdot 3}\,x^3+\beta(x,6)\right)\Bigg]_r^n+P(r,6) \qquad (3.24)$$

elde edilir. Burada

$$\beta(x,6)=\left\{\begin{array}{ll} \gamma(x) & , \quad n\equiv 0 \pmod 2 \\ -\frac{1}{4!\cdot 2^4}\,x^2+\gamma(x) & , \quad n\equiv 1 \pmod 2 \end{array}\right.$$

ve

$$\gamma(x)=\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{(3!)^2\cdot 5}\,x & , \quad n\equiv 0 \pmod 6 \\ -\frac{17\cdot 37}{6!\cdot 4!}\,x & , \quad n\equiv \pm 1 \pmod 6 \\ -\frac{7}{(3!)^2\cdot 3\cdot 5}\,x & , \quad n\equiv \pm 2 \pmod 6 \\ -\frac{103}{6!\cdot 2^3}\,x & , \quad n\equiv 3 \pmod 6. \end{array}\right.$$

r nin 60 değeri olduğundan (3.24), literatürde (Srdanov 2020) yer aldığı gibi aşağıda verilen biçimiyle elde edilir:

$$P(n,6) = \frac{1}{6!\cdot 5!}\,n^5 + \frac{1}{5!\cdot 2^5}\,n^4 + \frac{19}{6!\cdot 3!\cdot 3}\,n^3 + \beta(n,6) + w_{r,6} \tag{3.25}$$

(3.3) kullanılarak elde edilen

$$w_{6,6} = -\left(\frac{1}{6!\cdot 5!}\,6^5 + \frac{1}{5!\cdot 2^5}\,6^4 + \frac{19}{6!\cdot 3!\cdot 3}\,6^3 + \frac{1}{(3!)^2\cdot 5}\,6\right) + 1 = \frac{89}{2^4\cdot 5^2}$$

değeri, (3.5) kullanılarak (3.25)'te yazılırsa; $P(n,6)$ aşağıdaki gibi tam değer fonksiyonu ile ifade edilir:

$$P(n,6) = \left\lfloor \frac{1}{6!\cdot 5!}\,n^5 + \frac{1}{5!\cdot 2^5}\,n^4 + \frac{19}{6!\cdot 3!\cdot 3}\,n^3 + \beta(n,6) + \frac{89}{2^4\cdot 5^2} \right\rfloor \tag{3.26}$$

3.2.5 P(n,m) Poinomlarının bulunması, $7 \le m \le 10$

$P(n,m)$ polinomlarının $7 \le m \le 10$ için fraktal yapısının literatürde (Srdanov 2020) yer alması ve hesaplamaların önceki durumlara benzer olması nedeniyle, burada tam değer fonksiyonlaı ile ifade edilen $P(n,m)$ polinomları aşağıda doğrudan verilmektedir.

i) $m = 7$ ise

(1.32)'den $C_7 = 420$, $n = 420\,q + r$ ve $0 \le r < 420$ dir.

$$P(n,7) = \Big(A(x,7) + \beta(x,7)\Big)\Big]_r^n + P(r,7). \tag{3.27}$$

Burada,

$$A(x,7) = \frac{1}{7!\cdot 6!}\,x^6 + \frac{1}{6!\cdot 5!}\,x^5 + \frac{1}{6!\cdot 3^2}\,x^4 + \frac{7}{6!\cdot 3!\cdot 3}\,x^3,$$

$$\beta(x,7) = \begin{cases} -\dfrac{11}{6!\cdot 5}\,x^2 + \gamma(x) & , \quad n \equiv 0 \pmod 2 \\ -\dfrac{101}{(5!)^2\cdot 2^2}\,x^2 + \gamma(x) & , \quad n \equiv 1 \pmod 2, \end{cases}$$

$$\gamma(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(3!)^2}\,x & , \quad n \equiv 0 \pmod 6 \\ +\dfrac{29}{(4!)^2 \cdot 3! \cdot 3}\,x & , \quad n \equiv 1 \pmod 6 \\ -\dfrac{7}{(3!)^2 \cdot 3^2}\,x & , \quad n \equiv 2 \pmod 6 \\ -\dfrac{11}{(4!)^2 \cdot 2}\,x & , \quad n \equiv 3 \pmod 6 \\ -\dfrac{5}{(3!)^2 \cdot 3^2}x & , \quad n \equiv 4 \pmod 6 \\ -\dfrac{5 \cdot 7}{(4!)^2 \cdot 3! \cdot 3}x & , \quad n \equiv 5 \pmod 6. \end{cases}$$

Burada r nin 420 değeri olduğundan (3.27) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$P(n,7) = A(n,7) + \beta(n,7) + w_{r,7} \tag{3.28}$$

(3.28) denkleminde $w_{r,7}$ nin 420 değeri vardır. Ancak, burada sadece $w_{7,7}$ değeri (3.3)'ten aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$w_{7,7} = -\Big(A(7,7) + \beta(7,7)\Big) + 1 = \frac{19 \cdot 53 \cdot 73}{6! \cdot 5! \cdot 3}$$

Böylece, (3.28) denklemi (3.5) kullanılarak tam değer fonksiyonu ile aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$P(n,7) = \left\lfloor A(n,7) + \beta(n,7) + \frac{19 \cdot 53 \cdot 73}{6! \cdot 5! \cdot 3} \right\rfloor \tag{3.29}$$

ii) $m = 8$ ise

(1.32)'den $C_8 = 840$, $n = 840\,q + r$ ve $0 \le r < 840$ tır.

$$P(n,8) = \Big(A(x,8) + \beta(x,8)\Big)\Big]_r^n + P(r,8). \tag{3.30}$$

Burada

$$A(x,8) = \frac{1}{8! \cdot 7!}\,x^7 + \frac{1}{8! \cdot 4! \cdot 3}\,x^6 + \frac{83}{8! \cdot 5! \cdot 2}\,x^5 + \frac{7}{(4!)^3 \cdot 3!}\,x^4,$$

$$\beta(x,8) = \begin{cases} \dfrac{11 \cdot 17}{8! \cdot 3! \cdot 5}\,x^3 - \dfrac{1}{2^7 \cdot 5}\,x^2 + \gamma(x) & , \quad n \equiv 0 \pmod 2 \\ \dfrac{971}{8! \cdot 5! \cdot 2}\,x^3 - \dfrac{7^2}{5! \cdot 2^7}\,x^2 + \gamma(x) & , \quad n \equiv 1 \pmod 2, \end{cases}$$

$$\gamma(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{5!\cdot 2\cdot 7}\,x & , \quad n \equiv 0,4 \pmod{12} \\ -\dfrac{17\cdot 199}{5!\cdot 2^8\cdot 7}\,x & , \quad n \equiv 1,3,7,9 \pmod{12} \\ -\dfrac{811}{8!\cdot 3^2}\,x & , \quad n \equiv 2 \pmod{12} \\ -\dfrac{55501}{8!\cdot 4!\cdot 3!}\,x & , \quad n \equiv 5,11 \pmod{12} \\ -\dfrac{113}{5!\cdot 2^4\cdot 7}\,x & , \quad n \equiv 6,10 \pmod{12} \\ \dfrac{11\cdot 23}{7!\cdot 3^2}\,x & , \quad n \equiv 8 \pmod{12}. \end{cases}$$

Burada r nin 840 değeri olduğundan (3.30) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$P(n,8) = A(n,8) + \beta(n,8) + w_{r,\,8} \tag{3.31}$$

(3.3)'ten

$$w_{8,8} = -\Big(A(8,8) + \beta(8,8)\Big) + 1 = \frac{2\cdot 12347}{3^4\cdot 5^2\cdot 7^2}$$

olduğundan (3.31) tam değer fonksiyonu ile aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$P(n,8) = \left\lfloor A(n,8) + \beta(n,8) + \frac{2\cdot 12347}{3^4\cdot 5^2\cdot 7^2} \right\rfloor \tag{3.32}$$

iii) $m = 9$ ise

(1.32)'den $C_9 = 2520$, $n = 2520\,q + r$ ve $0 \le r < 2520$ dir.

$$P(n,9) = \Big(A(x,9) + \beta(x,9)\Big)\Big]_{r}^{n} + P(r,9). \tag{3.33}$$

Burada

$$A(x,9) = \frac{1}{9!\cdot 8!}\,x^8 + \frac{1}{8!\cdot 5!\cdot 7\cdot 2^2}\,x^7 + \frac{317}{9!\cdot 6!\cdot 2^2}\,x^6 + \frac{37}{8!\cdot 5\cdot 2^5}\,x^5 + \frac{17\cdot 31\cdot 43}{9!\cdot 6!\cdot 2}\,x^4,$$

$$\beta(x,9) = \begin{cases} -\dfrac{11}{6!\cdot 5!\cdot 2}x^3 + \gamma(x) & , \quad n \equiv 0 \pmod{2} \\ -\dfrac{101}{6!\cdot 5!\cdot 2^5}x^3 + \gamma(x) & , \quad n \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases}$$

$$\gamma(x) = \begin{cases} -\dfrac{14851}{7!\cdot (3!)^2\cdot 5\cdot 7}\,x^2 + \lambda(x) & , \quad n \equiv 0 \pmod{6} \\ -\dfrac{37.312971}{9!\cdot 7!\cdot 2^2}x^2 + \lambda(x) & , \quad n \equiv \mp 1 \pmod{6} \\ -\dfrac{153259}{7!\cdot (3!)^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}x^2 + \lambda(x) & , \quad n \equiv \mp 2 \pmod{6} \\ -\dfrac{13\cdot 31\cdot 41\cdot 61}{8!\cdot 7!\cdot 2^2}x^2 + \lambda(x) & , \quad n \equiv 3 \pmod{6}, \end{cases}$$

$\lambda(x) =$

$$\begin{cases} -\frac{1}{4!\cdot 7}\,x & n\equiv 0 \pmod{12}, \quad -\frac{11}{4!\cdot 2^5\cdot 7}\,x & n\equiv 6 \pmod{12} \\ -\frac{5\cdot 13\cdot 97}{(4!)^4\cdot 3^2\cdot 7}\,x & n\equiv 1 \pmod{12}, \quad -\frac{281\cdot 313}{(4!)^4\cdot 3^2\cdot 7}\,x & n\equiv 7 \pmod{12} \\ -\frac{15217}{(4!)^2\cdot(3!)^2\cdot 3^2\cdot 7}\,x & n\equiv 2 \pmod{12}, \quad -\frac{5\cdot 127}{4!\cdot 3^5\cdot 7}\,x & n\equiv 8 \pmod{12} \\ +\frac{3^3\cdot 5}{2^{12}\cdot 7}\,x & n\equiv 3 \pmod{12}, \quad +\frac{13\cdot 19}{2^{12}\cdot 7}\,x & n\equiv 9 \pmod{12} \\ -\frac{607}{4!\cdot 3^5\cdot 7}\,x & n\equiv 4 \pmod{12}, \quad -\frac{14321}{(4!)^2\cdot(3!)^2\cdot 3^2\cdot 7}\,x & n\equiv 10 \pmod{12} \\ -\frac{20641}{(4!)^4\cdot 3^2\cdot 7}\,x & n\equiv 5 \pmod{12}, \quad -\frac{11\cdot 17\cdot 547}{(4!)^4\cdot 3^2\cdot 7}\,x & n\equiv 11 \pmod{12}. \end{cases}$$

Burada, r nin 2520 değeri olduğundan (3.33) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$P(n,9) = A(n,9) + \beta(n,9) + w_{r,9} \tag{3.34}$$

(3.3)'ten

$$w_{9,9} = -\Big(A(9,9) + \beta(9,9)\Big) + 1 = \frac{4553891}{2^{14}\cdot 5^2\cdot 7^2}$$

olduğundan (3.34) tam değer fonksiyonu ile aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$P(n,9) = \left\lfloor A(n,9) + \beta(n,9) + \frac{4553891}{2^{14}\cdot 5^2\cdot 7^2} \right\rfloor \tag{3.35}$$

iv) $m = 10$ ise

(1.32)'den $C_{10} = 2520$, $n = 2520\,q + r$ ve $0 \le r < 2520$ dir.

$$P(n,10) = \Big(A(x,10) + \beta(x,10)\Big) + \Big]_r^n + P(r,10). \tag{3.36}$$

Burada

$$\begin{aligned} A(x,10) &= \frac{1}{10!\cdot 9!}\,x^9 + \frac{1}{10!\cdot (4!)^2\cdot 2^2}\,x^8 + \frac{47}{10!\cdot (4!)^2\cdot 3}\,x^7 \\ &\quad + \frac{7}{6!\cdot (4!)^3\cdot 3}\,x^6 + \frac{7\cdot 13\cdot 449}{(6!)^3\cdot 3!\cdot 5}\,x^5, \end{aligned}$$

$$\beta(x,10) = \begin{cases} \dfrac{11\cdot 139}{(6!)^2\cdot 4!\cdot 3!}\,x^4 - \dfrac{29\cdot 1499}{9!\cdot (3!)^2\cdot 5\cdot 7}\,x^3 + \gamma(x) & , \quad n\equiv 0 \pmod 2 \\ \dfrac{11827}{(6!)^2\cdot (4!)^2\cdot 2}\,x^4 - \dfrac{103\cdot 20249}{9!\cdot 7!\cdot 2^3}\,x^3 + \gamma(x) & , \quad n\equiv 1 \pmod 2, \end{cases}$$

$$\gamma(x) = \begin{cases} -\dfrac{439}{9!}\,x^2 + \lambda(x) & , \quad n \equiv 0 \pmod 6 \\ -\dfrac{622301}{9!\cdot(3!)^3\cdot 2^2}\,x^2 + \lambda(x) & , \quad n \equiv 1 \pmod 6 \\ -\dfrac{10733}{9!\cdot 3^3}\,x^2 + \lambda(x) & , \quad n \equiv 2 \pmod 6 \\ -\dfrac{25703}{9!\cdot 2^5}\,x^2 + \lambda(x) & , \quad n \equiv 3 \pmod 6 \\ -\dfrac{9613}{9!\cdot 3^3}\,x^2 + \lambda(x) & , \quad n \equiv 4 \pmod 6 \\ -\dfrac{11\cdot 19\cdot 47\cdot 67}{9!\cdot(3!)^3\cdot 2^2}x^2 + \lambda(x) & , \quad n \equiv 5 \pmod 6, \end{cases}$$

$\lambda(x) =$

$$\begin{cases} -\frac{190806281}{10!\cdot 6!\cdot 4!}\,x & n \equiv 1,13,37,49 \pmod{60}, \quad -\frac{1}{5!\cdot 3!}\,x & n \equiv 0 \pmod{60} \\ +\frac{11\cdot 14411}{10!\cdot 3!\cdot 3^2\cdot 5}\,x & n \equiv 2,14,26,38 \pmod{60}, \quad -\frac{103\cdot 14753}{6!\cdot(4!)^3\cdot(3!)^2}\,x & n \equiv 5 \pmod{60} \\ -\frac{347\cdot 6761}{8!\cdot 2^8\cdot 5^2}\,x & n \equiv 3,27,39,51 \pmod{60}, \quad +\frac{199\cdot 241}{6!\cdot 4!\cdot(3!)^2\cdot 3^2}\,x & n \equiv 10 \pmod{60} \\ +\frac{92153}{7!\cdot 3^5\cdot 5^2}\,x & n \equiv 4,16,28,52 \pmod{60}, \quad -\frac{8093}{6!\cdot 2^{11}}\,x & n \equiv 15 \pmod{60} \\ -\frac{12253}{8!\cdot 2^2\cdot 5^2}\,x & n \equiv 6,18,42,54 \pmod{60}, \quad +\frac{317}{6!\cdot 3^5}\,x & n \equiv 20 \pmod{60} \\ -\frac{68334281}{10!\cdot 6!\cdot 4!}\,x & n \equiv 7,19,31,43 \pmod{60}, \quad +\frac{11\cdot 18251}{6!\cdot(4!)^3\cdot(3!)^2}\,x & n \equiv 25 \pmod{60} \\ -\frac{13\cdot 4219}{7!\cdot 3^5\cdot 5^2}\,x & n \equiv 8,32,44,56 \pmod{60}, \quad +\frac{13}{6!\cdot 2^5}\,x & n \equiv 30 \pmod{60} \\ -\frac{11\cdot 17\cdot 15241}{8!\cdot 2^8\cdot 5^2}\,x & n \equiv 9,21,33,57 \pmod{60}, \quad -\frac{819719}{6!\cdot(4!)^3\cdot(3!)^2}\,x & n \equiv 35 \pmod{60} \\ -\frac{13\cdot 23\cdot 1235419}{10!\cdot 6!\cdot 4!}\,x & n \equiv 11,23,47,49 \pmod{60}, \quad +\frac{13\cdot 89}{6!\cdot 3^5}\,x & n \equiv 40 \pmod{60} \\ -\frac{17\cdot 37}{7!\cdot 5^2}\,x & n \equiv 12,24,36,48 \pmod{60}, \quad -\frac{10973}{6!\cdot 2^{11}}\,x & n \equiv 45 \pmod{60} \\ -\frac{41^2\cdot 292601}{10!\cdot 6!\cdot 4!}\,x & n \equiv 17,29,41,53 \pmod{60}, \quad +\frac{107\cdot 197}{6!\cdot 4!\cdot(3!)^2\cdot 3^2}\,x & n \equiv 50 \pmod{60} \\ +\frac{1559\cdot 3119}{10!\cdot 3!\cdot 3^2\cdot 5}\,x & n \equiv 22,34,46,58 \pmod{60}, \quad +\frac{13^2\cdot 73^2}{6!\cdot(4!)^3\cdot(3!)^2}\,x & n \equiv 55 \pmod{60}. \end{cases}$$

Burada r nin 2520 değeri olduğundan (3.36) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$P(n,10) = A(n,10) + \beta(n,10) + w_{r,10} \tag{3.37}$$

(3.3)'ten

$$w_{10,10} = -\Big(A_{10}(10) + \beta_{10}(10)\Big) + 1 = \frac{8876473}{(4!)^2\cdot 3!\cdot 3^5\cdot 7^2}$$

olduğundan (3.37) tam değer fonksiyonu ile aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$P(n,10) = \left\lfloor A(n,10) + \beta(n,10) + \frac{8876473}{(4!)^2\cdot 3!\cdot 3^5\cdot 7^2} \right\rfloor \tag{3.38}$$

3.3 P(n,m-1) İfadesinden P(n,m) nin Genel Formunun Bulunması

(1.34)'te m yerine $m-1$ yazılırsa;

$$P(n,m-1) = A(n,m-1) + \beta(n,m-1) + w_{j,m-1} \tag{3.39}$$

olur. Burada, (1.33)'ten

$$A(x,m-1) = \sum_{t=z}^{m-2} a_t\, x^t \ , \quad \beta(x,m-1) = \sum_{t=1}^{z-1} a_{t,s}\, x^t$$

ve (1.32) ile verilen notasyonlardan

$$z = \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \ , \quad s := n \pmod{C_z} \ , \quad j := n \pmod{C_{m-1}}$$

dir. Buna göre, $P(n,m-1)$ in a_t ve $a_{t,\,s}$ katsayıları belirli iken $P(n,m)$ nin genel formu aşağıdaki teorem ile elde edilir.

Teorem 3.1

$$\begin{aligned} P(n,m) &= \sum_{t=z}^{m-2} a_t\, S_t(n,m) + \sum_{t=1}^{z-1} \sum_{k=0}^{\frac{d}{m}-1} a_{t,\,\mu(k)}\, S_t(n-mk,d) \\ &\quad + q \sum_{k=0}^{\frac{C_m}{m}-1} w_{\eta(k),\,m-1} + P(r,m) \end{aligned} \tag{3.40}$$

dir. Burada, $d := ekok\,(m, C_z)$ ve

$$\begin{aligned} \mu(k) : &= s - (1+mk) - \left\lfloor \frac{s-(1+mk)}{C_z} \right\rfloor C_z, \\ \eta(k) : &= j - (1+mk) - \left\lfloor \frac{j-(1+mk)}{C_{m-1}} \right\rfloor C_{m-1}. \end{aligned}$$

İspat.

$n = C_m\, q + r$, $0 \le r < C_m$ ve $l_m = \frac{n-r}{m} - 1$ olduğu göz önüne alınırsa; (2.2)'den

$$\begin{aligned} P(n,m) &= \sum_{\substack{i=0 \\ r<m}}^{l_m} P(n-(1+mi),m-1) + \sum_{\substack{i=l_m+1 \\ r\ge m}}^{l_m+\frac{C_m}{m}-1} P(n-(1+mi),m-1) \\ &= \sum_{\substack{i=0 \\ r<m}}^{l_m} P(n-(1+mi),m-1) + \sum_{\substack{i=1 \\ r\ge m}}^{\frac{C_m}{m}-1} P(r-(1+m(i-1)),m-1) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada, ikinci toplam (2.1) yineleme bağıntısı ile $P(r,m)$ ye eşittir. Böylece,

$$P(n,m)=\sum_{i=0}^{l_m}P(n-(1+mi),m-1)+P(r,m) \tag{3.41}$$

olur. (3.41) denkleminde (3.39) uygulanırsa;

$$\begin{aligned}P(n,m) &= \sum_{i=0}^{l_m}A(n-(1+mi),m-1)+\sum_{i=0}^{l_m}\beta(n-(1+mi),m-1)\\ &\quad+\sum_{i=0}^{l_m}w_{j-(1+mi),\,m-1}+P(r,m)\end{aligned} \tag{3.42}$$

elde edilir. (3.42)'de

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{l_m}A(n-(1+mi),m-1) &= \sum_{i=0}^{l_m}\sum_{t=z}^{m-2}a_t\,(n-(1+mi))^t\\ &= \sum_{t=z}^{m-2}a_t\sum_{i=0}^{l_m}(n-(1+mi))^t\\ &= \sum_{t=z}^{m-2}a_t\,S_t(n,m)\end{aligned} \tag{3.43}$$

ve

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{l_m}\beta(n-(1+mi),m-1) &= \sum_{i=0}^{l_m}\sum_{t=1}^{z-1}a_{t,\,s-(1+mi)}\,(n-(1+mi))^t\\ &= \sum_{i=0}^{l_m}a_{z-1,\,s-(1+mi)}\,(n-(1+mi)^{z-1}\\ &\quad+\sum_{i=0}^{l_m}a_{z-2,\,s-(1+mi)}\,(n-(1+mi)^{z-2}\\ &\quad+\sum_{i=0}^{l_m}a_{z-3,\,s-(1+mi)}\,(n-(1+mi)^{z-3}\\ &\quad+\ \vdots\\ &\quad+\sum_{i=0}^{l_m}a_{1,\,s-(1+mi)}\,(n-(1+mi)^{1}\end{aligned} \tag{3.44}$$

açık biçimde yazılır.

$n\equiv s\pmod{C_z}$ olduğundan $n-(1+mi)\equiv s-(1+mi)\pmod{C_z}$ olduğu göz önüne alınırsa; (3.44) ile verilen toplamda $a_{t,s}$ katsayılarının belirli bir düzenle tekrar ettiği görülür.

Bu tekrarın y.terimde olduğu düşünülürse; $s-(1+my) \equiv s-1 \pmod{C_z}$ olacak biçimde y pozitif tamsayıları mevcuttur. Bu durumda, $my \equiv 0 \pmod{C_z}$ olur.
O halde, $my = ekok\,(m, C_z) =: d$ olup; (3.44)'te tekrar eden $a_{t,\,s}$ katsayıları, toplam $i=0$ dan l_m ye kadar alındığından $\dfrac{l_m+1}{y} = \dfrac{C_m q}{d}$ tanedir.

Böylece, (3.44)'te ilk toplam yani $t = z-1$ için,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{l_m} a_{z-1,\,s-(1+mi)}(n-(1+mi))^{z-1} &= a_{z-1,\,s-1}\sum_{i=0}^{l_d}(n-(1+di))^{z-1} \\ &+ a_{z-1,\,s-(1+m)}\sum_{i=0}^{l_d}(n-(1+m+di))^{z-1} \\ &+ a_{z-1,\,s-(1+2m)}\sum_{i=0}^{l_d}(n-(1+2m+di))^{z-1} \\ &+ \vdots \\ &+ a_{z-1,\,s-(1+d-m)}\sum_{i=0}^{l_d}(n-(1+d-m+di))^{z-1}\end{aligned} \tag{3.45}$$

yazılabilir. Burada, $l_d := \dfrac{C_m q}{d} - 1$ dir.

(3.45) aşağıdaki gibi yeniden düzenlenirse;

$$\sum_{i=0}^{l_m} a_{z-1,\,s-(1+mi)}\,(n-(1+mi))^{z-1} = \sum_{k=0}^{\frac{d}{m}-1}\sum_{i=0}^{l_d} a_{z-1,\,s-(1+mk)}\,(n-(1+mk+di))^{z-1}$$

elde edilir.

Burada, $s-(1+mk) \equiv \mu(k) \pmod{C_z}$ olduğundan (3.44) aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{l_m}\beta(n-(1+mi), m-1) &= \sum_{i=0}^{l_m}\sum_{t=1}^{z-1} a_{t,\,s-(1+mi)}(n-(1+mi))^t \\ &= \sum_{t=1}^{z-1}\sum_{k=0}^{\frac{d}{m}-1}\sum_{i=0}^{l_d} a_{t,s-(1+mk)}(n-(1+mk+di))^t \\ &= \sum_{t=1}^{z-1}\sum_{k=0}^{\frac{d}{m}-1} a_{t,\mu(k)}S_t(n-mk,d)\end{aligned} \tag{3.46}$$

$n \equiv j \pmod{C_{m-1}}$ olduğundan $n-(1+mi) \equiv j-(1+mi) \pmod{C_{m-1}}$ olduğu göz önüne alınırsa; (3.42) ile verilen toplamda $w_{j,m-1}$ katsayılarının da belirli bir düzenle tekrar ettiği görülür.

Bu tekrarın y.terimde olduğu düşünülürse; $j-(1+my) \equiv j-1 \pmod{C_{m-1}}$ olacak biçimde y pozitif tamsayıları mevcuttur. Bu durumda, $my \equiv 0 \pmod{C_{m-1}}$ olur. Böylece, $(m, m-1) = 1$ den dolayı $my = ekok\,(m, C_{m-1}) = C_m$ olup; tekrar eden $w_{j,\,m-1}$ sabit terimlerinin sayısı, toplam $i = 0$ dan l_m ye kadar alındığından $\dfrac{l_m+1}{y} = q$ dur.

Burada, $j-(1+mk) \equiv \eta(k) \pmod{C_{m-1}}$ olduğundan;

$$\sum_{i=0}^{l_m} w_{j-(1+mi),\,m-1} = q \sum_{i=0}^{\frac{C_m}{m}-1} w_{\eta(k),\,m-1} \tag{3.47}$$

yazılabilir.

Son olarak (3.43), (3.46) ve (3.47) denklemleri toplanırsa ispat tamamlanır. ■

Aşağıda, teoremin daha iyi anlaşılması için $P(n,11)$ elde edilerek; tam değer fonksiyonu ile ifade edilmektedir. Hesaplamaların benzer olması nedeniyle $P(n,12)$ ise doğrudan verilmektedir.

3.3.1 P(n,11) Polinomlarının Bulunması

(3.39) denkleminden $m = 11$ için $z = 5$, $C_z = 60$, $C_{m-1} = 2520$, $C_m = 27720$ ve $n \equiv j \pmod{2520}$, $n \equiv s \pmod{60}$ tır.

Ayrıca, Teorem 3.1'den $d = ekok\,(m,\, C_z) = 660$ ve $q = \dfrac{n-r}{27720}$ dir.

Teorem 3.1'den $(j,\, s) = (0,\, 0)$ için,

$$\begin{aligned} P(n,11) \;=\; & \sum_{t=5}^{9} a_t\, S_t(n,11) + \sum_{t=1}^{4}\sum_{k=0}^{59} a_{t,\,\mu(k)}\, S_t(n-11k, 660) \\ & + q \sum_{k=0}^{2519} w_{\eta(k),\,10} + P(r,11) \end{aligned} \tag{3.48}$$

yazılır.

Burada,

$$\begin{aligned}\mu(k) &= -(1+11k) - \left\lfloor \frac{-(1+11k)}{60} \right\rfloor \cdot 60, \\ \eta(k) &= -(1+11k) - \left\lfloor \frac{-(1+11k)}{2520} \right\rfloor \cdot 2520\end{aligned}$$

dir. (3.48) denklemi, (2.10) kullanılarak tekrar düzenlenirse;

$$\begin{aligned}P(n,11) &= \left\{ \sum_{t=5}^{9} a_t \frac{11^t}{t+1} B_{t+1}\left(\frac{x-1}{11}+1\right) \right. \\ &\quad + \sum_{t=1}^{4}\sum_{k=0}^{59} a_{t,\,\mu(k)} \frac{660^t}{t+1} B_{t+1}\left(\frac{x-11k-1}{660}+1\right) \\ &\quad \left. + \frac{x}{27720} \sum_{k=0}^{2519} w_{\eta(k),\,10} \right\} \Bigg]_r^n + P(r,11) \qquad (3.49)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, a_t ve $a_{t,\,\mu(k)}$ katsayıları $P(n,10)$ polinomlarının katsayıları olup; (3.36)'dan aşağıdaki gibi yazılırlar:

$$a_9 = \frac{1}{10!\cdot 9!}, \quad a_8 = \frac{1}{10!\cdot (4!)^2\cdot 2^2}, \quad a_7 = \frac{47}{10!\cdot (4!)^2\cdot 3},$$

$$a_6 = \frac{7}{6!\cdot (4!)^3\cdot 3}, \quad a_5 = \frac{7\cdot 13\cdot 449}{(6!)^3\cdot 3!\cdot 5}, \quad a_{4,\,2k} = \frac{11\cdot 139}{(6!)^2\cdot 4!\cdot 3!},$$

$$a_{3,\,2k} = -\frac{29\cdot 1499}{9!\cdot (3!)^2\cdot 5\cdot 7}, \quad a_{2,\,6k} = -\frac{439}{9!}, \quad a_{2,\,6k+1} = -\frac{622301}{9!\cdot (3!)^3\cdot 2^2},$$

$$a_{1,1} = a_{1,13} = a_{1,37} = a_{1,49} = -\frac{190806281}{10!\cdot 6!\cdot 4!}, \quad a_{1,0} = -\frac{1}{4!\cdot 3!\cdot 7}, \cdots, (k \geq 0).$$

$(\eta(k))$ dizisinin 2520 terimi olduğundan $P(n,10)$ polinomlarının $w_{\eta(k),\,10}$ sabit terimlerinin toplamı (3.3), Bernoulli polinomları ise (2.6) kullanılarak; $P(n,10)$ nun katsayılarıyla birlikte (3.49)'da Maple yazılımıyla hesaplanırsa;

$$\begin{aligned}P(n,11) &= \frac{1}{11!\cdot 10!}n^{10} + \frac{1}{10!\cdot 7!\cdot (3!)^2}n^9 + \frac{241}{10!\cdot 8!\cdot 3!\cdot 2}n^8 + \frac{11\cdot 13}{10!\cdot 4!\cdot (3!)^2\cdot 7}n^7 \\ &\quad + \frac{1907}{(6!)^3\cdot 3!\cdot 5}n^6 + \frac{11\cdot 3989}{10!\cdot 5!\cdot 3^2\cdot 5}n^5 + \frac{32413}{10!\cdot (3!)^2\cdot 5\cdot 7}n^4 \\ &\quad - \frac{11\cdot 197}{7!\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7}n^3 - \frac{2087}{7!\cdot (3!)^2\cdot 7}n^2 - \frac{1}{2^2\cdot 5\cdot 7}n\end{aligned}$$

elde edilir.

Tüm $(j,\ s)$ ikilileri için

$$P(n,11)=\Big(A(x,11)+\beta(x,11)\Big)\Big]_{r}^{n}+P(r,11) \tag{3.50}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} A(x,11) &= \frac{1}{11!\cdot 10!}x^{10}+\frac{1}{10!\cdot 7!\cdot (3!)^2}x^9+\frac{241}{10!\cdot 8!\cdot 3!\cdot 2}x^8+\frac{11\cdot 13}{10!\cdot 4!\cdot (3!)^2\cdot 7}x^7 \\ &\quad +\frac{1907}{(6!)^3\cdot 3!\cdot 5}x^6+\frac{11\cdot 3989}{10!\cdot 5!\cdot 3^2\cdot 5}x^5, \end{aligned}$$

$$\beta(x,11) = \begin{cases} \dfrac{32413}{10!\cdot (3!)^2\cdot 5\cdot 7}\,x^4-\dfrac{11\cdot 197}{7!\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7}\,x^3+\gamma(x) & ,\ n\equiv 0 \pmod 2 \\ \dfrac{19\cdot 233\cdot 491}{10!\cdot 8!\cdot 2}\,x^4-\dfrac{11\cdot 81019}{10!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 2\cdot 7}\,x^3+\gamma(x) & ,\ n\equiv 1 \pmod 2, \end{cases}$$

$$\gamma(x) = \begin{cases} -\dfrac{2087}{7!\cdot (3!)^2\cdot 7}\,x^2+\lambda(x) & ,\ n\equiv 0,4 \pmod 6 \\ -\dfrac{1094123}{9!\cdot 2^9\cdot 7}\,x^2+\lambda(x) & ,\ n\equiv 1,3 \pmod 6 \\ -\dfrac{13\cdot 37\cdot 109}{7!\cdot (3!)^2\cdot 3^3\cdot 7}\,x^2+\lambda(x) & ,\ n\equiv 2 \pmod 6 \\ -\dfrac{19\cdot 751\cdot 1789}{9!\cdot (4!)^3\cdot 7}\,x^2+\lambda(x) & ,\ n\equiv 5 \pmod 6 \end{cases}$$

$\lambda(x)$ en altta verilmiştir.

r nin $C_{11}=27720$ değeri olup; (3.50) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$P(n,11) = A(n,11)+\beta(n,11)+w_{r,\,11}$$

$w_{r,11}$ en büyük değerini $r=11$ için aldığından (3.3)'ten

$$w_{11,11}=-\Big(A(11,11)+\beta(11,11)\Big)+1=\frac{17\cdot 352332106031}{(10!)^2\cdot 2}.$$

Böylece, (3.5)'ten $P(n,11)$ tam değer fonksiyonu ile aşağıdaki gibi verilir:

$$P(n,\ 11)=\left\lfloor A(n,11)+\beta(n,11)+\frac{17\cdot 352332106031}{(10!)^2\cdot 2}\right\rfloor \tag{3.51}$$

$$\lambda(x) =$$

$$\begin{cases}
-\frac{1}{2^2\cdot 5\cdot 7}\,x & n\equiv 0,30 \pmod{60}, & +\frac{17\cdot 1783\cdot 18251}{10!\cdot 6!\cdot (3!)^2\cdot 5}\,x & n\equiv 1 \pmod{60}\\
+\frac{43\cdot 359}{(3!)^2\cdot 3^6\cdot 5^4\cdot 7}\,x & n\equiv 2,32 \pmod{60}, & +\frac{43\cdot 9173}{5!\cdot 2^{11}\cdot 5^3\cdot 7}\,x & n\equiv 3 \pmod{60}\\
-\frac{763271}{(3!)^2\cdot 3^6\cdot 5^4\cdot 7}\,x & n\equiv 4,34 \pmod{60}, & +\frac{11883121}{9!\cdot (4!)^2\cdot 3!\cdot 3}\,x & n\equiv 5 \pmod{60}\\
-\frac{3\cdot 23}{2^2\cdot 5^4\cdot 7}\,x & n\equiv 6,36 \pmod{60}, & +\frac{11\cdot 1289\cdot 77263}{10!\cdot 6!\cdot (3!)^2\cdot 5}\,x & n\equiv 7 \pmod{60}\\
-\frac{11\cdot 6947}{(3!)^2\cdot 3^6\cdot 5^4\cdot 7}\,x & n\equiv 8,38 \pmod{60}, & -\frac{11^2\cdot 23\cdot 71}{5!\cdot 2^{11}\cdot 5^3\cdot 7}\,x & n\equiv 9 \pmod{60}\\
-\frac{6841}{(3!)^2\cdot 3^6\cdot 5\cdot 7}\,x & n\equiv 10,40 \pmod{60}, & +\frac{47\cdot 5087\cdot 16349}{10!\cdot 6!\cdot (3!)^2\cdot 5}\,x & n\equiv 11 \pmod{60}\\
-\frac{83}{2^2\cdot 5^4\cdot 7}\,x & n\equiv 12,42 \pmod{60}, & -\frac{13\cdot 15327839}{10!\cdot 6!\cdot (3!)^2\cdot 5}\,x & n\equiv 13 \pmod{60}\\
-\frac{191\cdot 881}{(3!)^2\cdot 3^6\cdot 5^4\cdot 7}\,x & n\equiv 14,44 \pmod{60}, & +\frac{13\cdot 31}{5!\cdot 2^{11}\cdot 7}\,x & n\equiv 15 \pmod{60}\\
-\frac{487709}{(3!)^2\cdot 3^6\cdot 5^4\cdot 7}\,x & n\equiv 16,46 \pmod{60}, & +\frac{43\cdot 4999\cdot 12161}{10!\cdot 6!\cdot (3!)^2\cdot 5}\,x, & n\equiv 17 \pmod{60}\\
-\frac{97}{2^2\cdot 5^4\cdot 7}\,x & n\equiv 18,48 \pmod{60}, & +\frac{31\cdot 239\cdot 46301}{10!\cdot 6!\cdot (3!)^2\cdot 5}\,x, & n\equiv 19 \pmod{60}\\
-\frac{2081}{(3!)^2\cdot 3^6\cdot 5\cdot 7}\,x & n\equiv 20,50 \pmod{60}, & +\frac{318503}{5!\cdot 2^{11}\cdot 5^3\cdot 7}\,x, & n\equiv 21 \pmod{60}\\
-\frac{579563}{(3!)^2\cdot 3^6\cdot 5^4\cdot 7}\,x & n\equiv 22,52 \pmod{60}, & +\frac{53\cdot 59554681}{10!\cdot 6!\cdot (3!)^2\cdot 5}\,x, & n\equiv 23 \pmod{60}\\
-\frac{3\cdot 37}{2^2\cdot 5^4\cdot 7}\,x & n\equiv 24,54 \pmod{60}, & -\frac{83\cdot 91733}{9!\cdot (4!)^2\cdot 3!\cdot 3}\,x, & n\equiv 25 \pmod{60}\\
+\frac{31\cdot 3461}{(3!)^2\cdot 3^6\cdot 5^4\cdot 7}\,x & n\equiv 26,56 \pmod{60}, & +\frac{467\cdot 1213}{5!\cdot 2^{11}\cdot 5^3\cdot 7}\,x, & n\equiv 27 \pmod{60}\\
-\frac{671417}{(3!)^2\cdot 3^6\cdot 5^4\cdot 7}\,x & n\equiv 28,58 \pmod{60}, & +\frac{59\cdot 173\cdot 182387}{10!\cdot 6!\cdot (3!)^2\cdot 5}\,x, & n\equiv 29 \pmod{60}\\
+\frac{19\cdot 557\cdot 139067}{10!\cdot 6!\cdot (3!)^2\cdot 5}\,x, & n\equiv 31 \pmod{60}, & -\frac{25561}{5!\cdot 2^{11}\cdot 5^3\cdot 7}\,x, & n\equiv 33 \pmod{60}\\
+\frac{1409\cdot 13649}{9!\cdot (4!)^2\cdot 3!\cdot 3}\,x, & n\equiv 35 \pmod{60}, & +\frac{1709\cdot 103553}{10!\cdot 6!\cdot (3!)^2\cdot 5}\,x, & n\equiv 37 \pmod{60}\\
+\frac{37\cdot 6011}{5!\cdot 2^{11}\cdot 5^3\cdot 7}\,x, & n\equiv 39 \pmod{60}, & +\frac{17^2\cdot 31\cdot 333779}{10!\cdot 6!\cdot (3!)^2\cdot 5}\,x, & n\equiv 41 \pmod{60}\\
+\frac{719278093}{10!\cdot 6!\cdot (3!)^2\cdot 5}\,x, & n\equiv 43 \pmod{60}, & -\frac{2957}{5!\cdot 2^{11}\cdot 7}\,x, & n\equiv 45 \pmod{60}\\
+\frac{13\cdot 23\cdot 499\cdot 23677}{10!\cdot 6!\cdot (3!)^2\cdot 5}\,x, & n\equiv 47 \pmod{60}, & -\frac{37\cdot 3767\cdot 4129}{10!\cdot 6!\cdot (3!)^2\cdot 5}\,x, & n\equiv 49 \pmod{60}\\
+\frac{59\cdot 12517}{5!\cdot 2^{11}\cdot 5^3\cdot 7}\,x, & n\equiv 51 \pmod{60}, & +\frac{2237858093}{10!\cdot 6!\cdot (3!)^2\cdot 5}\,x, & n\equiv 53 \pmod{60}\\
-\frac{79\cdot 3361}{9!\cdot (4!)^2\cdot 3!\cdot 3}\,x, & n\equiv 55 \pmod{60}, & +\frac{13\cdot 19\cdot 593}{5!\cdot 2^{11}\cdot 5^3\cdot 7}\,x, & n\equiv 57 \pmod{60}\\
+\frac{24917\cdot 111577}{10!\cdot 6!\cdot (3!)^2\cdot 5}\,x, & n\equiv 59 \pmod{60}, & &
\end{cases}$$

3.3.2 P(n,12) Polinomlarının Bulunması

$$P(n,\,12) = A(x,12) + \beta(x,12)\Big]_r^n + P(r,12). \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}
A(x,12) \;=\; & \frac{1}{12!\cdot 11!}\,x^{11} + \frac{1}{12!\cdot 5!\cdot 2^5\cdot 7\cdot 5}\,x^{10} + \frac{4049}{12!\cdot 9!\cdot 3!\cdot 2}\,x^9\\
& + \frac{103}{10!\cdot 5!\cdot 2^8\cdot 7}\,x^8 + \frac{17\cdot 1117}{12!\cdot 5!\cdot 3^2\cdot 7}\,x^7 + \frac{29\cdot 41}{(6!)^2\cdot 5!\cdot 2^5\cdot 5}\,x^6,
\end{aligned}$$

$$\beta(x,12) \;=\; \begin{cases} \dfrac{13\cdot 29\cdot 14107}{12!\cdot 5!\cdot 7\cdot 5\cdot 2}\,x^5+\dfrac{463}{8!\cdot 5!\cdot 2^2\cdot 7\cdot 5}\,x^4+\gamma(x) & ,\quad n\equiv 0 \pmod 2 \\ \dfrac{84729599}{12!\cdot 5!\cdot 2^5\cdot 7\cdot 5}\,x^5-\dfrac{11\cdot 313}{8!\cdot 5!\cdot 2^8\cdot 7\cdot 5}\,x^4+\gamma(x) & ,\quad n\equiv 1 \pmod 2, \end{cases}$$

$$\gamma(x) \;=\; \begin{cases} -\dfrac{17\cdot 7331}{11!\cdot 2^2\cdot 7}\,x^3+\lambda(x) & ,\quad n\equiv 0 \pmod 6 \\ -\dfrac{10437903071}{12!\cdot (4!)^2\cdot (3!)^2\cdot 7}\,x^3+\lambda(x) & ,\quad n\equiv \mp 1 \pmod 6 \\ -\dfrac{23\cdot 1354207}{12!\cdot 3^4\cdot 7}\,x^3+\lambda(x) & ,\quad n\equiv \mp 2 \pmod 6 \\ -\dfrac{42045797}{11!\cdot 2^{10}\cdot 7}\,x^3+\lambda(x) & ,\quad n\equiv 3 \pmod 6, \end{cases}$$

$$\lambda(x) \;=\; \begin{cases} -\dfrac{31}{5!\cdot 2^4\cdot 7^2}\,x^2+\delta(x) & ,\quad n\equiv 0 \pmod{12} \\ -\dfrac{67\cdot 23910431}{9!\cdot (4!)^3\cdot (3!)^2\cdot 7}\,x^2+\delta(x) & ,\quad n\equiv 1,7 \pmod{12} \\ -\dfrac{19\cdot 179\cdot 3917}{9!\cdot 4!\cdot (3!)^2\cdot 3^2\cdot 7}\,x^2+\delta(x) & ,\quad n\equiv 2 \pmod{12} \\ -\dfrac{29\cdot 2251}{2^{18}\cdot 5\cdot 7^2}\,x^2+\delta(x) & ,\quad n\equiv 3,9 \pmod{12} \\ -\dfrac{337\cdot 1063}{9!\cdot 3^5\cdot 7}\,x^2+\delta(x) & ,\quad n\equiv 4 \pmod{12} \\ -\dfrac{11^2\cdot 163\cdot 82039}{9!\cdot (4!)^3\cdot (3!)^2\cdot 7}\,x^2+\delta(x) & ,\quad n\equiv 5,11 \pmod{12} \\ -\dfrac{1237}{5!\cdot 2^9\cdot 7^2}\,x^2+\delta(x) & ,\quad n\equiv 6 \pmod{12} \\ -\dfrac{53\cdot 6907}{9!\cdot 3^5\cdot 7}\,x^2+\delta(x) & ,\quad n\equiv 8 \pmod{12} \\ -\dfrac{13\cdot 263\cdot 3823}{9!\cdot 4!\cdot (3!)^2\cdot 3^2\cdot 7}\,x^2+\delta(x) & ,\quad n\equiv 10 \pmod{12}, \end{cases}$$

$\delta(x)$ en altta verilmiştir.

r nin $C_{12}=27720$ değeri olduğundan (3.52) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$P(n,\,12)=A(n,12)+\beta(n,12)+w_{r,12} \tag{3.53}$$

$r=12$ iken $w_{r,12}$ en büyük olduğundan (3.3)'ten

$$w_{12,12}=-\left(A(12,12)+\beta(12,12)\right)+1=\frac{630893}{11^2\cdot 7^2\cdot 5^4}$$

bulunur. Böylece, (3.5)'ten $P(n,12)$ aşağıdaki gibi tam değer fonksiyonu ile verilir:

$$P(n,\,12) = \left\lfloor A(n,12) + \beta(n,12) + \frac{630893}{11^2 \cdot 7^2 \cdot 5^4} \right\rfloor \tag{3.54}$$

$\delta(x) =$

$$\begin{cases}
+\frac{1}{3!\cdot 3\cdot 7}\,x & n \equiv 0, 36 \pmod{60}, & +\frac{5\cdot 17}{3!\cdot 3^7\cdot 7}\,x & n \equiv 20, 56 \pmod{60} \\
-\frac{19\cdot 3769637}{(4!)^6\cdot 3!\cdot 3\cdot 7}\,x & n \equiv 1, 25 \pmod{60}, & +\frac{34217}{(4!)^2\cdot 2^{13}\cdot 7}\,x & n \equiv 21, 45 \pmod{60} \\
-\frac{1723\cdot 63773}{10!\cdot 5!\cdot 3^3\cdot 5}\,x & n \equiv 2, 14 \pmod{60}, & -\frac{29\cdot 113\cdot 21227}{10!\cdot 5!\cdot 3^3\cdot 5}\,x & n \equiv 22, 34 \pmod{60} \\
+\frac{61\cdot 167\cdot 2731}{8!\cdot 2^{12}\cdot 5^3}\,x & n \equiv 3 \pmod{60}, & -\frac{50395191887}{10!\cdot (6!)^2\cdot 2^3}\,x & n \equiv 23 \pmod{60} \\
+\frac{92177}{3^8\cdot 5^4\cdot 7}\,x & n \equiv 4, 52 \pmod{60}, & -\frac{37\cdot 8819}{(4!)^3\cdot (3!)^2\cdot 3^3\cdot 7}\,x & n \equiv 26, 50 \pmod{60} \\
-\frac{5^2\cdot 43\cdot 163\cdot 503}{(4!)^6\cdot 3!\cdot 3\cdot 7}\,x & n \equiv 5, 41 \pmod{60}, & +\frac{181\cdot 397\cdot 617}{8!\cdot 2^{12}\cdot 5^3}\,x & n \equiv 27, 39 \pmod{60} \\
+\frac{457}{(4!)^2\cdot 2^5\cdot 7}\,x & n \equiv 6, 30 \pmod{60}, & +\frac{138427}{3!\cdot 3^7\cdot 5^4\cdot 7}\,x & n \equiv 28 \pmod{60} \\
-\frac{41\cdot 683750839}{10!\cdot (6!)^2\cdot 2^3}\,x & n \equiv 7, 19 \pmod{60}, & -\frac{5\cdot 587\cdot 28409}{(4!)^6\cdot 3!\cdot 3\cdot 7}\,x & n \equiv 31, 55 \pmod{60} \\
+\frac{2\cdot 24763}{3^8\cdot 5^4\cdot 7}\,x & n \equiv 8 \pmod{60}, & +\frac{113\cdot 1283}{3!\cdot 3^7\cdot 5^4\cdot 7}\,x & n \equiv 32, 44 \pmod{60} \\
+\frac{23\cdot 43\cdot 55021}{8!\cdot 2^{12}\cdot 5^3}\,x & n \equiv 9, 57 \pmod{60}, & +\frac{37900697}{8!\cdot 2^{12}\cdot 5^3}\,x & n \equiv 33 \pmod{60} \\
-\frac{261791}{(4!)^3\cdot (3!)^2\cdot 3^3\cdot 7}\,x & n \equiv 10, 46 \pmod{60}, & -\frac{71\cdot 291344569}{10!\cdot (6!)^2\cdot 2^3}\,x & n \equiv 37, 49 \pmod{60} \\
-\frac{8317\cdot 12011}{(4!)^6\cdot 3!\cdot 3\cdot 7}\,x & n \equiv 11, 35 \pmod{60}, & -\frac{11\cdot 31\cdot 460147}{10!\cdot 5!\cdot 3^3\cdot 5}\,x & n \equiv 38 \pmod{60} \\
+\frac{751}{3!\cdot 3\cdot 5^4\cdot 7}\,x & n \equiv 12, 24 \pmod{60}, & +\frac{43\cdot 9643}{8!\cdot 2^4\cdot 5^3}\,x & n \equiv 42, 54 \pmod{60} \\
-\frac{12889\cdot 2538983}{10!\cdot (6!)^2\cdot 2^3}\,x & n \equiv 13 \pmod{60}, & -\frac{11\cdot 19\cdot 23\cdot 947\cdot 8803}{10!\cdot (6!)^2\cdot 2^3}\,x & n \equiv 43 \pmod{60} \\
+\frac{18089}{(4!)^2\cdot 2^{13}\cdot 7}\,x & n \equiv 15, 51 \pmod{60}, & -\frac{47\cdot 1559\cdot 523463}{10!\cdot (6!)^2\cdot 2^3}\,x & n \equiv 47, 59 \pmod{60} \\
+\frac{2\cdot 37}{3^8\cdot 7}\,x & n \equiv 16, 40 \pmod{60}, & +\frac{2^3\cdot 43}{3^2\cdot 5^4\cdot 7}\,x & n \equiv 48 \pmod{60} \\
-\frac{149\cdot 233\cdot 893147}{10!\cdot (6!)^2\cdot 2^3}\,x & n \equiv 17, 29 \pmod{60}, & -\frac{43046871887}{10!\cdot (6!)^2\cdot 2^3}\,x & n \equiv 53 \pmod{60} \\
+\frac{350137}{8!\cdot 2^4\cdot 5^3}\,x & n \equiv 18 \pmod{60}, & -\frac{47\cdot 461\cdot 5381}{10!\cdot 5!\cdot 3^3\cdot 5}\,x & n \equiv 58 \pmod{60}.
\end{cases}$$

Bu tez çalışmasından elde edilen bulgular, Soyvural ve Ekin (2026) tarafından *Turkish Journal of Mathematics* dergisinde yayımlanan çalışmada sunulmuştur.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde, literatürdeki yöntemlerden farklı olarak (2.1) ile verilen yineleme bağıntısı ile $P(n,\, m-1)$ polinomlarının katsayıları kullanılarak; $P(n,\, m)$ polinomlarının genel formu elde edilmiştir.
Bu yöntem, Bernoulli polinomlarının sağladığı cebirsel avantajlardan yararlanarak; Faulhaber formülü üzerinden katsayıların sistematik bir şekilde türetilmesini sağlamaktadır.
Ayrıca, $P(n,\, m)$ polinomlarının sabit terimlerinin maksimum değer koşullarını belirleyen (3.4) eşitsizliği ile $m \leq 12$ için $P(n,\, m)$ polinomları tam değer fonksiyonları biçiminde ifade edilmiştir.
Yineleme bağıntısı, her bir m değeri için $P(n,\, m)$ polinomlarının $P(n,\, m-1)$ polinomları ile olan ilişkisini açıkça göstermiştir.
Faulhaber formülü sayesinde de belirli dereceden kuvvetler toplamı, $P(n,\, m)$ nin n ye bağlı olarak belirli modüler yapılarda değişen cebirsel ifadelerle temsil edilmesine olanak sağlamıştır.

Literatürdeki çalışmalar farklı yöntemler içeriyor olsa da, hiç biri $P(n,\, m)$ nin tam değer fonksiyonu ile ifade edilmesine değinmemiştir. Bu nedenle elde edilen sonuçlar, ayrışım fonksiyonlarının aritmetik yapısı bakımından özgün bir katkı niteliği taşımaktadır.
$m \leq 12$ için elde edilen $P(n,\, m)$ tam değer fonksiyonları, literatürde ilk kez bu çalışmada sistematik ve doğrudan hesaplanabilir bir biçimde sunulmuştur.

Buna karşın, çalışmanın elbette sınırlılıkları da vardır. Bernoulli polinomlarına dayalı Faulhaber formülü, polinomların derecelerinin hızla artmasına yol açar ve dolayısıyla m büyüdükçe hesaplamaların karmaşıklığı ciddi bir biçimde artmaktadır.

Bu çalışmanın ve kullanılan yöntemin geliştirilebilirliği üzerine birkaç önemli araştırma yönü de mevcuttur. Özellikle Bernoulli polinomlarının yarattığı karmaşıklığın

kontrol edilmesine yönelik daha gelişmiş bilgisayar cebiri sistemleri ile entegrasyonu sağlanabilir. Daha da önemlisi, üreteç fonksiyonu ile tam değer fonksiyonu arasında sistematik bir eşleştirme geliştirilebilir.

Bu çalışma, bu tür araştırmalar için hem yöntemsel hem de hesaplamalı bir temel sunmaktadır.

KAYNAKLAR

Ahlgren, S., & Ono, K., (2001). *Addition and counting: the arithmetic of partitions*. Notices of the AMS, 48(9), 978-984.

Andrews, G.E., (1976). *The Theory of Partitions*, Encyclopedia of Mathematics and Its Application, Addison-Wesley, London.

Andrews, G. E., (1983). *Euler's pentagonal number theorem*. Mathematics Magazine, 56(5), 279-284.

Andrews, G. E., & Garvan, F. G., (1988). *Dyson's crank of a partition*. Bulletin of the American Mathematical Society, 18(2), 167-171.

Bazsó, A., & Mező, I. (2015). *On the coefficients of power sums of arithmetic progressions*. Journal of Number Theory, 153, 117-123. https://doi.org/10.1016/j.jnt.2015.01.019

Bing, W. Z., Fokkink, R., & Fokkink, W. (1995). *A relation between partitions and the number of dvisors*, Amer.Math.Monthly, 102,345-347.

Guo, S. L., & Qi, F. (1999). *Recursion Formulae for* $\sum_{m=1}^{n} m^k$. Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen 1999; 18 (4): 1123-1130. https://doi.org/10.4171/ZAA/933

Gupta, H., (1971). *On partitions of n into k summands*. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 1971; 17 (4): 337-339. https://doi.org/10.1017/S0013091500009615

Hardy, G. H., & Ramanujan, S., (1918). *Asymptotic formulaæ in combinatory analysis*. Proceedings of the London Mathematical Society, 2(1), 75-115.

Howard, FT., (1996). *Sums of powers of integers via generating functions*. Fibonacci Quarterly 1996; 34: 244-256. https://doi.org/10.1080/00150517.1996.12429069

Intrator, J., (1968). *Partitions, I*. Czechoslovak Mathematical Journal, 18(1), 16-24. https://doi.org/10.21136/CMJ.1968.100809

Mattson Jr, H. F., (2023). *On restricted partitions of numbers*. Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, 34(5), 751-791. https://doi.org/10.1007/s00200-021-00524-5

Munagi AO., (2007). *Computation of q-partial fractions*. Integers 2007; 7 (1): Paper-A25. https://doi.org/10.5281/zenodo.8281184

Sills, AV., & Zeilberger, D., (2012). *Formulæ for the number of partitions of n into at most m parts (using the quasi-polynomial ansatz)*. Advances in Applied Mathematics 2012; 48 (5): 640-645. https://doi.org/10.1016/j.aam.2011.12.003

SOYVURAL, Y., & EKİN, A. B. (2026). *Some methods for finding the number of partitions of n with m-parts, P (n, m)*. Turkish Journal of Mathematics, 50(1), 23-39. https://doi.org/10.55730/1300-0098.3633

Srdanov, A., (2018). *Universal formulas for the number of partitions*. Proceedings-Mathematical Sciences, 128(4), 40. https://doi.org/10.1007/s12044-018-0418-z

Srdanov, A., (2020). *Fractal form of the partition functions* $p(n)$. AIMS Mathematics 2020; 5 (3): 2539-2568. https://doi.org/10.3934/math.2020167

Watson, G.N., (1938). *Ramanujans Vermutung über Zerfällungszahlen*. ournal f'ur die reine und angewandte Mathematik; 179, 97 - 128.